

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова»

М.А. Носов

# Введение в теорию волн цунами

Учебное пособие  
для студентов высших учебных заведений

Москва 2019

УДК 551.466.62

ББК 26.221

Н 84

*Рецензент:*

Главный научный сотрудник Института прикладной физики РАН, профессор, доктор физ.-мат. наук Е.Н. Пелиновский

*Носов М.А. Введение в теорию волн цунами. Учебное пособие. – М.: Янус-К, 2019, 170 с.*

ISBN 978-5-8037-0773-8

Настоящее учебное пособие подготовлено по материалам лекций, прочитанных автором на физическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова в 2004–2019 гг. В основу издания легли общефакультетский курс «Основы геофизики» («Основы геофизики и экологии» до 2017 г), спецкурсы кафедры физики моря и вод суши «Физика морских природных катастроф» и «Экстремальные явления в геофизике», спецкурс для аспирантов «Гидродинамические модели в теории волн цунами», а также межфакультетский учебный курс МГУ «Физика цунами». Основная цель настоящего издания – систематизация и методически выверенное изложение той части лекционного материала, которая имеет отношение к теоретическим аспектам проблемы цунами. Важным предназначением издания является описание основных приближений, используемых в теории волн цунами, демонстрация способов получения аналитических решений модельных задач и представление физических выводов, которые следуют из этих решений.

В оформлении обложки использованы картина японского художника Кацусика Хокусай «Большая волна в Канагаве» и фотография последствий катастрофического цунами 2011 г в Японии, сделанная автором в марте 2012 г.

© Носов М.А., 2019

ISBN 978-5-8037-0773-8

## Оглавление

<b>Введение</b>	5
<b>Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМУ ЦУНАМИ</b>	7
1.1. Общие сведения о явлении цунами	7
1.2. Цунами – длинные гравитационные волны	13
1.3. Причины образования цунами	14
1.4. Прогноз	19
<b>Глава 2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЦУНАМИ</b>	24
2.1. Общая постановка задачи	24
2.2. Теория длинных волн	27
2.3. Потенциальная теория несжимаемой жидкости	32
2.4. Потенциальная теория сжимаемой жидкости	35
<b>Глава 3. БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА ВОЛН</b>	41
3.1. Длинные волны	41
3.2. Потенциальные волны в несжимаемой жидкости	48
3.3. Гидроакустические волны	61
<b>Глава 4. ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН</b>	68
4.1. Одномерные задачи теории длинных волн	68
4.2. Двумерные задачи теории длинных волн	82
4.3. Задачи потенциальной теории несжимаемой жидкости	87
4.3.1. Аналитическое решение плоской задачи	87
4.3.2. Генерация волн в канале поршневой и мембранной подвижками	98
4.3.3. Пространственная задача	106
4.4. Задача потенциальной теории сжимаемой жидкости	112

<b>Глава 5. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ</b>	124
5.1. Начальное возвышение в очаге цунами	124
5.2. Остаточные гидродинамические поля	140
5.2.1. Вводные замечания	141
5.2.2. Однородный океан	143
5.2.3. Стратифицированный океан	151
<b>Литература</b>	161

## Введение

Настоящее учебное пособие написано автором, который около 30 лет занимается исследованиями в области физики цунами и около 20 лет преподаванием в области геофизики и физики моря. В основу издания легли материалы лекций, прочитанных автором на физическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова в 2004-2019 гг. в рамках общефакультетского курса «Основы геофизики» («Основы геофизики и экологии» до 2017 г.), спецкурсов кафедры физики моря и вод суши «Физика морских природных катастроф» и «Экстремальные явления в геофизике», спецкурса для аспирантов «Гидродинамические модели в теории волн цунами», а также межфакультетского учебного курса МГУ «Физика цунами». Основная цель настоящего издания – систематизация и методически выверенное изложение той части лекционного материала, которая имеет отношение к теоретическим аспектам проблемы цунами. Важным предназначением издания является описание основных приближений, используемых в теории волн цунами, демонстрация способов получения аналитических решений модельных задач и представление физических выводов, которые следуют из этих решений.

Учебное пособие содержит пять взаимосвязанных глав. В *первой главе* приводятся общие сведения о явлении цунами, вводятся основные термины, описывается география этого катастрофического явления и причины его возникновения, а также подходы к решению задачи прогноза. *Вторая глава* посвящена общему гидродинамическому описанию волн цунами. Здесь изложены сведения об основных приближениях, используемых в теории цунами, и выведены уравнения, соответствующие этим приближениям. В *третьей главе* рассматриваются базовые свойства гравитационных и акустических волн в водном слое, – эти сведения являются необходимыми для понимания физики процесса генерации и распространения цунами. *Четвертая глава*

посвящена модельным задачам о генерации волн в водном слое динамическими деформациями дна. Эти задачи решаются в рамках теории длинных волн и потенциальной теории несжимаемой и сжимаемой жидкости. В *пятой главе* исследуется задача об определении начального возвышения в очаге цунами и анализируются свойства остаточных гидродинамических полей, инициируемых во вращающемся океане косейсмическими деформациями дна.

Учебное пособие предназначено главным образом для студентов старших курсов, обучающихся по физико-математическим специальностям. Первую главу можно рекомендовать широкому кругу читателей, ознакомление с ней не требует специальной физико-математической подготовки.

Автор выражает искреннюю признательность рецензенту этого издания профессору Е.Н. Пелиновскому за конструктивные замечания, а также советы по совершенствованию подачи материала и расширению круга обсуждаемых в учебном пособии тем. Автор благодарен к.ф.-м.н. К.А. Семенцову за внимательное прочтение рукописи и замечания, которые немало способствовали улучшению качества представления материала.

*М.А.Носов*

# Глава 1

## ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМУ ЦУНАМИ

Предназначение этой главы – дать общее представление о цунами и показать место этого явления среди иных природных катастроф. Будут введены базовые термины, описаны основные параметры рассматриваемого явления и его география, упомянуты некоторые исторические и недавние цунами-события. Особое внимание будет уделено классификации цунами по причинам возникновения и подходам к прогнозу волн.

### 1.1. Общие сведения о явлении цунами

Проблема цунами является актуальным и практически востребованным направлением современной геофизики, находящимся на стыке физической океанологии и сейсмологии. За истекшие годы 21-го века произошли более 10 крупных цунами, которые унесли жизни 250 тысяч человек и причинили колоссальный материальный ущерб. Наиболее катастрофические из этих событий – цунами в Индонезии 26.12.2004 и в Японии 11.03.2011 – убедительно показали, что, несмотря на обширные накопленные знания о физической природе цунами, разработанные математические модели явления и технологии прогноза, проблема цунами все еще далека от разрешения. Стремительный рост населения прибрежной зоны, развитие береговой инфраструктуры и интенсификация хозяйственной деятельности на шельфе (добыча углеводородов, прокладка трубопроводов, линий связи) повышают уязвимость берегов к морским природным катастрофам, среди которых волны цунами играют не последнюю роль.

В XX веке природные катастрофы унесли более 4 млн. человеческих жизней. Доля волн цунами в этой страшной

статистике была относительно невелика ~1%. Лидирующие позиции по числу жертв принадлежали землетрясениям, наводнениям, тайфунам (ураганам) и вулканическим извержениям [Topics 2000, 2001]. Ситуация кардинально изменилась после катастрофического цунами в Индийском океане 26 декабря 2004 г, которое сопровождалось беспрецедентным числом погибших (227 899 – по данным NGDC/WDS Global Historical Tsunami Database). Это событие сразу поставило волны цунами на первое место по числу жертв среди всех природных катастроф XXI века [Гусьяков, 2014, 2016]. Цунами, которое обрушилось 11 марта 2011 г. на побережье Японии, также привело к колоссальным человеческим жертвам (18 453 – по данным NGDC/WDS Global Historical Tsunami Database). Сопоставление этих двух близких по масштабам катастроф ясно показывает, что служба предупреждения о цунами (СПЦ), которая была в 2011 г. в Японии, но отсутствовала в 2004 г. в Индийском океане, имеет важнейшее значение для сохранения человеческих жизней: число жертв отличается более, чем на порядок. Но при этом следует подчеркнуть, что высокий уровень организации СПЦ в Японии, сочетающийся с информированностью и дисциплинированностью населения, не позволил избежать гибели людей. Сила катастрофы 2011 г., несмотря на высочайший уровень фундаментальных и прикладных исследований по землетрясениям и цунами в Японии, была явно недооценена. Приведенные два примера, а также последствия иных катастрофических цунами XXI века свидетельствуют о том, что проблема цунами остается актуальной, и ее решение требует привлечения новых идей и технологий.

Побережье Российской Федерации также подвержено воздействию волн цунами. Главным образом страдает Дальневосточное побережье, исторический каталог цунами в этом регионе содержит более 100 событий [Гусьяков, 2016]. Первое для этого региона описание катастрофических проявлений цунами (Камчатка, 1737 г.) дал известный исследователь Камчатки С.П. Крашенинников [Крашенинников, 1755]. Приведем фрагмент этого впечатляющего описания.

*«Учинился на море ужасный шум и волнение, и вдруг взлилось на берега воды в вышину сажени на три, которая, ни мало не стояв, сбегала в море и удалилась от берегов на знатное*

*расстояние. Потом вторично земля всколебалась, воды прибыло против прежнего, но при отлитии столь далеко она сбежала, что моря видеть невозможно было. В то время усмотрены в проливе на дне морском между первым и вторым Курильским островом каменные горы, которые до того никогда не виданы, хотя трясение и наводнение случалось и прежде. С четверть часа после того последовали валы ужасного и несравненного трясения, а при том взлилось воды на берег в вышину сажен на 30, которая по-прежнему, нимало не стояв, сбежала в море и вскоре встала на берегах своих, колыбаясь через долгое время... В некоторых местах луга холмами, а поля морскими заливами сделались».*

Одним из самых разрушительных цунами за всю историю наблюдений в Дальневосточном регионе явилось Камчатское цунами, которое в ночь с 4 на 5 ноября 1952 г. обрушилось на берега Камчатки и Северных Курильских островов. Город Северо-Курильск на севере острова Парамушир был фактически уничтожен волнами. Высоты волн по разным оценкам достигали от 18.6 до 23 м. Оценка числа погибших ~10 тыс. человек [Гусяков, 2016; NGDC/WDS Global Historical Tsunami Database]. Приведем описание этого события, данное Е.Ф. Саваренским. Цитируем по статье [Соловьев, 1968].

*«В ночь с 4 на 5 ноября жители Северо-Курильска были разбужены землетрясением: разрушались печи, падали трубы, домашняя утварь. Через сорок минут после прекращения землетрясения послышался грохот со стороны океана и на город обрушился водяной вал, двигавшийся с большой скоростью. Через несколько минут вода отступила, унося разрушенное, и дно океана обнажилось на несколько сот метров. Через 15-20 минут на город снова надвинулась водяная стена, достигавшая 10-метровой высоты. Она практически смыла все на своем пути, оставляя от строений в лучшем случае бетонные фундаменты. Из земли были вывернуты и разбросаны по сторонам старые доты, в порту опрокинуты стенки ковша, а находившиеся там катера заброшены на сотни метров на берег.*

*Отразившись от окружающих город сопок, волна стала скатываться в низину, где ранее находился центр города. Здесь образовался огромный водоворот, в котором с большой скоростью вращались всевозможные обломки строений и мелкие*

*суда. В течение нескольких минут в этом водовороте погибло много людей.*

*Через несколько минут после этой, наиболее сильной, волны на опустошенное побережье нахлынула сравнительно слабая, третья, волна, оставившая после себя на берегу много обломков».*

Из сильных цунами-событий, произошедших в Дальневосточном регионе уже в XXI веке, упомянем цунами с высотами заплеска более 20 м, которые были вызваны землетрясениями на Центральных Курильских островах в 2006 и 2007 гг. [Левин и др., 2008]. Только по счастливому стечению обстоятельств, эти события не привели к человеческим жертвам.

Слово «цунами» происходит из японского языка и в дословном переводе означает «волна в гавани». В современной научной литературе термином «цунами» принято обозначать низкочастотные поверхностные гравитационные волны, возникающие в океане в результате сейсмических движений дна, оползней и обвалов (в том числе и подводных), вулканических извержений, воздействия на водный слой подвижных неоднородностей атмосферного давления и напряжения трения ветра (метеоцунами). Аналогичные по характеристикам волны могут возникать и при мощных подводных взрывах. В последнее время активно обсуждается вопрос о генерации цунами в результате падения метеоритов, – такие катастрофы, несомненно, имели место в геологическом прошлом Земли, однако за все время существования нашей цивилизации ни одно космогенное цунами не было зарегистрировано. Следует иметь в виду возможность комбинации различных причин. Так, например, подводные оползни, спровоцированные землетрясением, часто обеспечивают дополнительный вклад в энергию волн цунами, которые возникли в результате сейсмических движений дна. В ряде случаев вулканогенные цунами бывают сформированы не только самим вулканическим извержением, но и сопутствующими ему землетрясениями и обвалами. Рассматривая все причины вкуче, можно утверждать, что любое побережье крупного водоема потенциально опасно с точки зрения цунами.

Опасность, которую несут с собой волны цунами, связана в первую очередь со следующими тремя факторами: внезапным затоплением части суши, волновым воздействием на сооружения и

эрозией. Сильные потоки воды, достигающие скоростей в десятки метров в секунду, способны ломать и перемещать дома, подмывать фундаменты зданий, разрушать мосты, портовые конструкции. Потоки воды часто несут в себе обломки зданий и прочих сооружений, деревья, малые и большие суда, что не оставляет шансов на выживание у человека, попавшего в такой поток. Ущерб, наносимый цунами, может быть также связан с пожарами, загрязнением окружающей среды, эпидемиями, возникшими в результате разрушения береговой инфраструктуры.

Цунами, как правило, проявляется не как одиночная волна, а как серия волн с периодом в десятки минут. При этом первая волна часто бывает не самой сильной. Пренебрежение этим свойством волн цунами или неосведомленность о нем часто приводит к человеческим жертвам.

В зависимости от масштабности области, в которой проявляется разрушительная сила цунами, принято различать локальные, региональные и удаленные события (телецунами). Последние иногда еще называют трансокеанскими цунами. К локальным цунами относят те события, для которых разрушительный эффект сосредоточен на расстояниях не более 100 км от источника. Если разрушения происходят на расстояниях до 1000 км от источника, то такое событие классифицируется как региональное, свыше 1000 км – телецунами. Большинство катастрофических событий относятся именно к локальным или региональным цунами. Трансокеанские цунами происходят существенно реже, но они, разумеется, гораздо опаснее. Причинив существенный ущерб в непосредственной близости от очага, эти волны способны распространяться на многие тысячи километров от источника, продолжая нести с собой смерть и разрушения.

Способность волн цунами сохранять свою разрушительную силу при распространении на трансокеанские расстояния выделяет это явление на фоне других природных катастроф. Так например, Гавайские острова периодически подвергаются воздействию волн цунами, которые вызываются удаленными источниками – землетрясениями, происходящими по периметру Тихого океана в так называемом «огненном кольце». Специалистам хорошо известны катастрофические проявления чилийского цунами 1960 г. на противоположном берегу Тихого океана. В Японии – на

расстоянии около 17 тыс. км от источника – эти волны сопровождалась гибелью 138 человек и материальным ущербом \$50 млн. На дальневосточном побережье России обошлось без человеческих жертв, но материальные потери оказались также весьма значительными (30 млн. советских руб.). Впечатляющий пример разрушительного дальнего действия цунами связан с волной, вызванной землетрясением 1946 г. на Алеутских островах. Преодолев расстояние около 16 тыс.км., волна повредила хижину английской экспедиции на острове Винтер вблизи Земли Грэхема в Антарктиде [Fuchs 1982; Gusiakov 2014]. Есть свой яркий пример трансокеанского цунами и в Атлантике: землетрясение 1755 г. в Лиссабоне сопровождалось волнами с амплитудой более 3 м на островах Карибского моря на расстоянии от источника свыше 5 тыс. км [Okal, 2011].

К настоящему времени (май 2019 г.) историческая база данных по цунами в Мировом океане NGDC/WDS Global Historical Tsunami Database содержит информацию о 2640 цунами-событиях. Анализируя географическое распределение очагов цунами, можно заключить, что наиболее цунамиопасным является Тихоокеанский регион, в котором известно о 1657 событиях. В Средиземном море имели место 477 цунами. Есть сведения о цунами в Атлантическом океане (302), Индийском океане (161), в Черном и Каспийском морях (26), Красном море и Персидском заливе (7).

В Российской Федерации наиболее цунамиопасным регионом является Дальний Восток [Гусяков, 2016]. Максимально опасным представляется тихоокеанское побережье Камчатки и Курильских островов, которое подвержено воздействию катастрофических волн цунами, образованных как местными, так и удаленными источниками, расположенными в Тихом океане. Цунамиопасными также являются побережья Охотского и Японского морей. Волны цунами многократно возникали в Черном, Азовском и Каспийском морях [Доценко и др., 2003; Соловьева и др., 2004; Никонов и др., 2018]. По своей интенсивности эти события заметно уступают цунами тихоокеанского региона. Но из-за высокой уязвимости побережий, которая обязана повышенной плотности населения и береговой инфраструктуре, расположенной без учета возможности

катастрофических колебаний уровня моря, последствия цунами в этом регионе могут быть очень тяжелыми.

## 1.2. Цунами – длинные гравитационные волны

С точки зрения гидродинамики волны цунами в большинстве случаев относятся к классу длинных гравитационных волн на воде. Для класса длинных волн их длина существенно превосходит глубину океана ( $\lambda \gg H$ ). Скорость распространения длинных волн в водоеме глубиной  $H$  определяется формулой  $c = \sqrt{gH}$ , где  $g$  – ускорение силы тяжести. При глубине  $H \sim 4$  км длинные волны (в том числе и цунами) распространяются со скоростью порядка 200 м/с или около 720 км/час, что сопоставимо со скоростью современного реактивного авиалайнера.

Период волн цунами ( $T$ ) лежит в диапазоне от  $10^2$  до  $10^4$  с (от нескольких минут до нескольких часов). По периоду волны и скорости ее распространения можно рассчитать длину волны:  $\lambda = T\sqrt{gH}$ . Простая оценка, выполненная по этой формуле, показывает, что в открытом океане длина волны цунами должна варьироваться от 20 до 2000 км. Заметим, что в отличии, например, от приливных волн, волны цунами не всегда имеют достаточную длину для соответствия модели длинных волн. Короткопериодные цунами подвержены дисперсии, которая свойственна гравитационным волнам на воде.

Амплитуда цунами в открытом океане даже для катастрофических событий обычно измеряется десятками сантиметров и редко превышает 1 м. Впрочем, в источнике цунами амплитуда смещения поверхности воды может достигать 10 м и более. Но и в этом случае она, как правило, много меньше глубины океана. Малость амплитуды при большом периоде делает волну цунами в открытом океане практически незаметной для наблюдателя, находящегося на борту морского или воздушного судна.

В силу того, что скорость распространения цунами зависит от глубины, картина распространения этих волн существенным образом связана с рельефом дна. Для цунами свойственны

эффекты захвата волновой энергии подводными хребтами и шельфом, эффекты фокусировки и дефокусировки при распространении волны над подводными возвышенностями и впадинами. Неровности дна приводят к рассеиванию энергии волн цунами. Уменьшение глубины при подходе цунами к берегу сопровождается снижением скорости распространения волн, а, следовательно, и сжатием волнового пакета в пространстве (иногда в десятки раз) и увеличением амплитуды смещения поверхности воды и скорости горизонтальных течений. Линейная теория длинных волн дает следующие связи амплитуды волны  $A$  и скорости горизонтального течения  $U$  с глубиной бассейна:  $AH^{1/4}=\text{const}$ ,  $UH^{3/4}=\text{const}$ . Скорости течений в волне растут существенно быстрее, чем амплитуда. Поэтому сильные прибрежные течения могут представлять угрозу для судов, находящихся в порту или на рейде. При объявлении тревоги цунами стандартной рекомендацией для судов является выход в открытое море.

### 1.3. Причины образования цунами

Распределение всех известных цунами по типам источников (NGDC/WDS Global Historical Tsunami Database) представлено в Табл. 1. Из таблицы можно сделать заключение, что основной причиной возникновения цунами являются землетрясения. С сейсмическими событиями так или иначе связаны почти 77% всех цунами. Второй по значимости причиной следует считать оползни 7.6% (в том числе в комбинации с землетрясениями и вулканическими извержениями). Далее следуют вулканические извержения (5.5%) и метеорологические причины (3.7%).

Основным механизмом генерации цунами при землетрясениях является вытеснение воды косейсмическими деформациями дна. Эти деформации также называют остаточными или статическими. Область, охваченная косейсмическими деформациями, которую именуют очаг цунами, в большинстве случаев имеет вытянутую форму и сочетает в себе участки поднятия и опускания дна. Пример косейсмической деформации, вызванной цунамигенным землетрясением на Центральных Курилах 15.11.2006 ( $M_W = 8.3$ )

представлен на Рис. 1.1. При сильных землетрясениях в зонах субдукции ближайшая к побережью часть очаговой области, как правило, претерпевает косейсмическое опускание. Косейсмическое опускание самого берега может приводить к долговременному подтоплению прибрежной области.

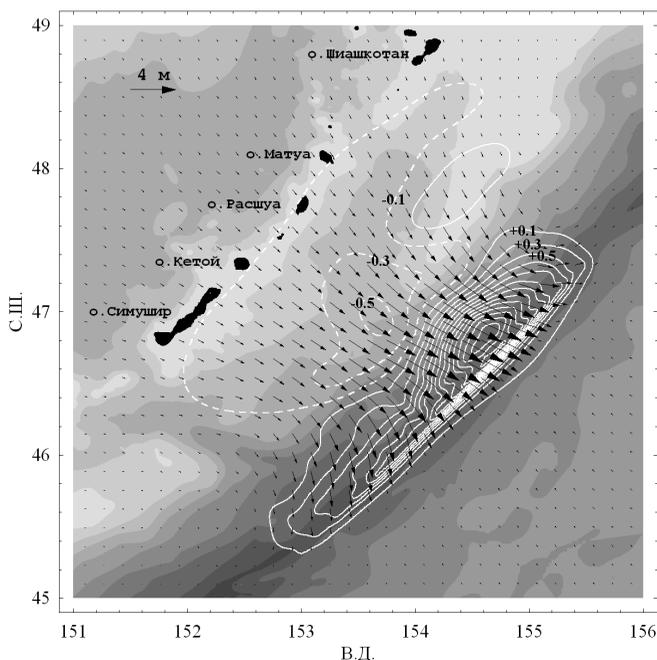
*Табл. 1. Распределение цунами-событий по причинам возникновения (доля в %) в соответствии с базой данных NGDC/WDS Global Historical Tsunami Database*

%	<i>тип источника</i>
72.3	Землетрясение
4.6	вулканическое извержение
3.7	метеорологические причины
3.6	Оползень
3.6	землетрясение и оползень
0.5	возможно землетрясение
0.5	вулканическое извержение и землетрясение
0.4	вулканическое извержение и оползень
0.04	вулканическое извержение, землетрясение и оползень
10.5	причина неизвестна

Размер очага цунами и амплитуда деформаций дна зависят главным образом от моментной магнитуды землетрясения  $M_W$ . При изменении величины магнитуды  $M_W$  от 7 до 9 размер очага цунами увеличивается от десятков до сотен километров, а амплитуда деформации дна возрастает от одного до десяти метров [Levin, Nosov, 2016]. Приведенные здесь цифры являются приближенными, т.к. параметры деформации дна в очаге цунами зависят не только от  $M_W$ , но также сложным образом связаны со свойствами сейсмического источника: его глубиной, механизмом, распределением подвижки вдоль площадки разрыва.

Длительность процесса деформации дна в очаге цунами определяется временем вспарывания разрыва в очаге землетрясения. Скорость вспарывания разрыва составляет несколько километров в секунду и всегда значительно превосходит скорость распространения цунами. Поэтому

формирование цунами землетрясением можно рассматривать как мгновенный процесс.



*Рис. 1.1. Косейсмическая деформация дна в очаге цунами 15.11.2006. Вертикальная компонента деформации показана белыми изолиниями (сплошная линия – поднятие, пунктир – опускание), горизонтальная – черными стрелками. Распределение глубин показано серым тоном, шаг изобат 1 км*

После цунами сейсмического происхождения наиболее распространенными являются оползневые цунами. Этот термин обозначает гравитационные поверхностные волны, образованные подводными оползнями и мутьевыми потоками, обрушением в воду фрагментов крутых берегов, скал и ледников, фрагментов айсбергов, а иногда и портовых сооружений. Примечательно, что рекорд высот заплеска принадлежит именно оползневому цунами. Обвал снежно-ледовой массы вместе с коренными породами объемом около  $0.3 \text{ км}^3$ , произошедший в 1958 г. в бухте Литуя

(Аляска), вызвал волну, которая выплеснулась на берег до высоты 524 м.

По сравнению с горизонтальным размером сейсмического источника береговые и подводные оползни обычно имеют сравнительно небольшие масштабы (100-1000 м). Крупнейший из известных в геологической истории оползней Стореджа (Storregga), произошел в районе крутого континентального склона около побережья Норвегии. Его горизонтальный размер оценивается в десятки километров. Несмотря на локальный характер, оползневые цунами по своей разрушительной силе ни в чем не уступают волнам сеймотектонического происхождения. Особенно опасны такие цунами в узких проливах, фиордах и в закрытых заливах и бухтах. Оползневые цунами могут происходить не только в океанах и морях, но и в реках, озерах и водохранилищах. Известны случаи возникновения оползневых цунами на реках Волга и Иртыш [Левин, Носов, 2005]. Недавний (11.12.2018) массивный оползень, попавший в покрытое льдом толщиной 20-25 см Бурейское водохранилище, вызвал волны с высотами свыше 50 м.

Подводные оползни обычно являются результатом длительного накопления осадочного материала в течение десятков и сотен лет. Со временем накопленные на склонах массы осадков теряют устойчивость. Спровоцировать сход оползня могут множество факторов: внезапный выброс речных взвесей во время речного паводка; эрозия осадочного слоя на крутом склоне дна; береговое строительство; длительные дожди, приводящие к водонасыщению берегового грунта; обнажение берега во время сильного отлива. Важнейшей причиной оползней и обвалов, конечно, служат землетрясения. Не последнюю роль в инициации оползневых процессов и обвалов играют вулканические извержения.

Взрывы вулканических островов (коллапсы кальдер), эксплозивные (взрывоподобные) извержения подводных вулканов, пирокластические потоки, попадающие в воду, – все эти явления способны вызывать волны, которые по своей разрушительной силе ни в чем не уступают цунами сеймотектонического происхождения. Одним из ярчайших исторических примеров вулканогенного цунами являются волны, вызванные активностью вулкана Кракатау в августе 1883 г. Образовавшиеся в результате

волны цунами достигали высоты 42 м, вглубь суши они проникали на расстояние до 5 км. Другое часто обсуждаемое событие произошло в бронзовом веке (около 35 веков назад) в Эгейском море.

Современный пример вулканогенного цунами – волны вызванные 22.12.2018 извержением вулкана Анак-Кракатау. По данным NGDC/WDS Global Historical Tsunami Database в результате этого цунами погибло 437 человек, высоты заплеска достигали 30 м.

Основными физическими механизмами возбуждения вулканогенных цунами являются: выброс в воду большого объема вещества (от медленного истечения лавы до эксплозивного или взрывного извержения) и коллапс кальдеры (взрыв вулканического острова) с последующим заполнением кальдеры водой. Кроме того, способствовать формированию вулканогенных цунами могут пирокластические потоки, обвалы, попадающие в воду, а также вулканические землетрясения.

Длинные волны, аналогичные по своим характеристикам волнам цунами сейсмотектонического происхождения, могут образовываться в результате воздействия на водный слой различных атмосферных процессов. Эти волны принято называть анемобарическими волнами или метеоцунами. Основными причинами возникновения метеоцунами служат подвижные неоднородности атмосферного давления и напряжение трения ветра. Сразу заметим, что в отличие от иных механизмов генерации цунами, в данном случае важную роль играют резонансные эффекты, проявляющиеся, когда скорость распространения атмосферных возмущений и их период оказываются близкими к скорости длинных волн и периоду собственных колебаний акватории. Явление метеоцунами имеет много общего с так называемыми штормовыми нагонами. Фактически термины метеоцунами и штормовой нагон обозначают круг явлений, вызванных одной и той же причиной – воздействием атмосферы. Единственное формальное отличие штормового нагона от метеоцунами заключается в разнице максимальных периодов. Для цунами максимальный период не превышает нескольких часов, а штормовые нагоны могут продолжаться несколько суток.

Катастрофические волны цунами могут возникать при падении в океан тел из межпланетного пространства. На нашей планете обнаружены сотни кратеров – следов соударения метеорных тел с Землей. Мировой океан занимает примерно 71% поверхности нашей планеты, поэтому большая часть метеоритов падает именно в океан, дно которого хранит следы многих таких соударений, вызывавших в прошлом катастрофы планетарного масштаба. Но за все время существования нашей цивилизации ни одно космогенное цунами не было зарегистрировано. Поэтому представления о космогенных цунами опираются на теоретический анализ, результаты численных экспериментов или поиски геологических следов таких событий. Объекты относительно небольших размеров регулярно «бомбардируют» Землю, но большинство из них разрушаются и сгорают еще в верхних слоях атмосферы. Критический для каменного метеорного тела размер, при котором оно способно достичь поверхности Земли, составляет около 100 м в диаметре. Но вероятность падения крупных метеорных тел является крайне низкой по сравнению с вероятностью обычного сейсмотектонического цунами. Крупные объекты (~0.7 км), которые могут представлять реальную угрозу, сталкиваются с Землей один раз в 60 тыс. лет [Toon et al., 1997].

#### 1.4. Прогноз

Цунами, как и землетрясение, предотвратить невозможно. Но это катастрофическое явление можно прогнозировать, уменьшая тем самым человеческие потери и материальный ущерб. В этом разделе речь пойдет исключительно про прогноз волн, которые вызываются подводными землетрясениями. Напомним, что землетрясение – это самая распространенная причина возникновения цунами. Методы прогноза вулканогенных и оползневых цунами пока находятся в зачаточном состоянии. Метеоцунами можно прогнозировать, и такие системы ныне находятся в стадии становления [Renault et al., 2011; Denamiel et al., 2019]. Не останавливаясь на деталях, отметим, что задача прогноза метеоцунами тесно связана с задачей прогноза погоды. Цунами, образуемые взрывами или падением метеоритов,

представляют собой особый класс явлений, для которых не подходят стандартные прогностические инструменты. Например, теория длинных волн, которая обычно применяется при моделировании цунами, может в этих случаях дать заведомо неверный результат.

Скорость распространения цунами (~200 м/с в открытом океане) существенно уступает скорости сейсмических волн (~3 км/с), которые несут с собой информацию об факте и параметрах очага цунамигенного землетрясения. Именно поэтому волны цунами сейсмического происхождения – это прогнозируемая природная катастрофа. Интервал между приходом сейсмических волн и волн цунами может варьироваться от нескольких минут (локальные цунами) до десятков часов (трансокеанские цунами). В ряде случаев локальные цунами, из-за недостатка времени, не могут быть спрогнозированы в принципе или такой прогноз не имеет практического смысла, так как эвакуационные мероприятия не могут быть реализованы.

Первый прогноз цунами в дальней зоне, основанный на интерпретации сейсмических данных, по-видимому, относится к Камчатскому землетрясению 03.02.1923 [Okal, 2011]. Томас Джагер (Thomas Jaggar) – директор вулканологической обсерватории на Гавайях – придя утром в лабораторию, обнаружил, что сейсмометр, предназначенный для мониторинга вулканического тремора, зарегистрировал сильное и далекое землетрясение. Определить положение эпицентра, обладая данными только с одного сейсмометра, было невозможно. Но по разнице вступления Р и S волн можно было оценить эпицентральное расстояние. Оценки показывали, что землетрясение большой силы произошло где-то в бассейне Тихого океана. Несколько месяцев ранее (11.11.1922) Гавайские острова уже подвергались воздействию волн цунами с высотами заплеска около 2 м, источник которых располагался у Чилийского побережья. Из анализа этого события Томасу Джагеру была известна скорость распространения цунами в океане. По известному эпицентальному расстоянию он рассчитал время прибытия цунами, вызванного Камчатским землетрясением 03.02.1923, к Гавайским островам и сообщил о своем прогнозе местным властям в Хило (Hilo). К сожалению, этот прогноз

расценили просто как фантазию ученого джентельмена. Тем не менее волны цунами действительно достигли Гавайских островов, причинив ущерб в \$1.5 млн. и вызвав гибель 1 человека. Через 10 лет, во время землетрясения 02.03.1933 (Япония, Санрику), история повторилась. На этот раз местные власти отнеслись с прогнозу с большим уважением и эвакуировали население из опасных областей. Цунами было разрушительным, но никто не погиб.

В настоящее время оперативный прогноз цунами базируется на сейсмических данных и предустановленных критериях (магнитудно-географическом критерии) [Поплавский и др., 2009; Гусяков, 2010; Чебров, 2019]. Решение об объявлении тревоги цунами принимают, если магнитуда сейсмического события превышает некоторое пороговое значение. Пороговое значение магнитуды варьируется в зависимости от региона. В Курило-Камчатском регионе пороговое значение составляет 7.0.

Сильная зависимость характеристик цунами от механизма очага землетрясения и его глубины приводит к тому, что далеко не каждое подводное землетрясение с магнитудой, превышающей пороговую, сопровождается образованием волн, которые представляют реальную опасность. Приведем пример из практики российской СПЦ, который говорит о несовершенстве магнитудно-географического критерия. Речь идет о ложной тревоге цунами, которая в соответствии с регламентом информационно-обрабатывающего центра «Южно-Сахалинск» Сахалинского филиала геофизической службы РАН была объявлена по охотоморскому побережью Сахалина и Курильских островов при землетрясении в Охотском море 24.05.2013 ( $M_w=8.3$  USGS) [rtws.ru]. Позднее был объявлен отбой тревоги в связи с глубоким расположением гипоцентра.

Второй примечательный случай относится к проявлению Чилийского цунами 2010 г. на российском побережье. Этот случай свидетельствует как о несовершенстве применяемых методик, так и о сложности явления цунами. Волны максимальной амплитуды (около 2 м) достигли острова Парамушир спустя несколько часов после вступления относительно слабой лидирующей волны и спустя час (!) после отбоя тревоги цунами [Shevchenko et al, 2013].

Итак, методики прогноза, опирающиеся исключительно на сейсмические данные, не могут являться панацеей. Для подтверждения или отмены тревоги цунами важно обладать объективной информацией о самом факте возникновения волны. Такая информация может быть получена, когда волна окажется зарегистрированной ближайшей к источнику станцией уровня моря или каким-либо иным способом.

Изначально для регистрации вариаций уровня моря, обязанных волнам цунами, использовались исключительно береговые измерения. В конце 1960-х годов С.Л.Соловьев предложил принципиально новый метод оперативного прогноза, основанный на регистрации волны вдали от берега [Соловьев, 1968]. Получив существенное техническое развитие, этот метод в настоящее время активно используется: вариации уровня моря регистрируются сетями высокочувствительных датчиков давления, которые расположены на дне океанов и морей (DART, NEPTUNE, DONET, S-net и др.). Точность измерения высоты столба жидкости обычно не хуже 1 мм.

По сравнению с береговыми измерениями глубоководная регистрация цунами имеет целый ряд важных преимуществ [Levin, Nosov, 2016]. Во-первых, в силу того, что скорость распространения цунами возрастает при увеличении глубины океана, глубоководный датчик быстрее регистрирует волну, чем береговой мареограф, расположенный на том же расстоянии от очага. Во-вторых, при подходе к побережью волна цунами сильно искажается (например, из-за резонанса в бухтах) и отчасти «забывает» о свойствах породившего ее источника. В тоже время в открытом океане сигнал цунами не является искаженным или фильтрованным. В-третьих, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) донных датчиков давления является абсолютно плоской в диапазоне волн цунами, в то время как многим береговым мареографам свойственна сложная и непостоянная АЧХ. В-четвертых, частотный диапазон волн цунами характеризуется чрезвычайно низким уровнем фонового шума ( $\sim 0.001$  м), что позволяет легко различать сигнал цунами с амплитудой порядка 0.01 м. Для сравнения отметим, что в диапазоне длин волн цунами уровень естественного «шума» (вариации положения поверхности воды, обязанные мезомасштабным океаническим вихрям)

значительно выше ( $\sim 0.1$  м), что затрудняет выделение сигнала цунами на профиле уровня моря при «мгновенной» съемке вдоль трека спутниковым альтиметром [Куликов и др., 2005]. И, наконец, еще одним важным преимуществом глубоководных измерителей, по сравнению с береговыми, является их «неуязвимость» по отношению к разрушающему воздействию катастрофических волн цунами, которое всегда приурочено к береговой мелководной зоне.

Развитие плотной сети донных измерителей уровня моря уже в недалеком будущем способно поднять оперативный прогноз цунами на качественно новый уровень. При этом не исключено, что роль сейсмической информации в прогнозе будет уменьшаться, а роль распределенных измерений уровня моря выйдет на первый план. Можно даже представить себе систему предупреждения о цунами, базирующуюся исключительно на глубоководных измерениях уровня моря [Носов, Григорьева, 2015; Tapioka, 2018]. Такой подход, несомненно, позволил бы избежать многочисленных ошибок в оперативном прогнозе, которые связаны со сложной и неоднозначной связью между землетрясением и цунами.

Оригинальный способ оперативного прогноза цунами реализован в конце 20-го века в Японии [Tatehata 1997; Handbook..., 2001]. Методика основана на том, что очаги цунами имеют свойство повторяться. Поэтому задача гидродинамического моделирования цунами, требующая длительных расчетов, решена заранее. Результаты расчетов сведены в специальной базе данных. Когда происходит реальное подводное землетрясение, то в соответствии с его магнитудой и местоположением эпицентра, из базы выбираются необходимые данные, по которым с помощью метода интерполяции оперативно рассчитываются возможные высоты заплесков.

Похожая система оперативного прогноза цунами, использующая предварительные расчеты волн, создаваемых «единичными» источниками, создана в PMEL/NOAA [Gica et al., 2008]. Ее особенностью является заложенная возможность коррекции расчетных волн по данным измерений глубоководными станциями DART.

## **Глава 2**

### **ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЦУНАМИ**

В этой главе мы изложим общий гидродинамический подход к описанию волн, возбуждаемых в водном слое динамическими деформациями дна океана и/или вариациями атмосферного давления. В первом параграфе представлена общая формулировка гидродинамической задачи, во втором и третьем параграфах – два ключевых приближения, которые используются при описании динамики волн цунами: теория длинных волн и потенциальная теория. В четвертом параграфе задача динамики цунами рассмотрена с учетом сжимаемости воды.

#### **2.1. Общая постановка задачи**

Отправной точкой при построении любых гидродинамических моделей служат уравнения Навье-Стокса, которые описывают движение вязкой сжимаемой жидкости [Ландау, Лифшиц, 1988]. В принципе, эти уравнения могут быть проинтегрированы численно, соответствующий подход известен как «прямое численное моделирование» (DNS – direct numerical simulation). Для воспроизведения динамики волн цунами этот подход использовался, например, в работах [Abadie et al., 2010; Horrillo et al., 2013; Kozelkov et al., 2015]. Известны также работы, авторы которых применяют уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу (уравнения Рейнольдса), дополненные теми или иными гипотезами замыкания [Hsiao et al., 2010; Kim et al., 2015; Qin et al., 2018]. Но в большинстве случаев при описании динамики цунами водный слой рассматривают как идеальную (невязкую) жидкость. Пренебрежение вязкостью позволяет снизить порядок уравнений гидродинамики. При этом упрощаются граничные условия на дне: условие прилипания заменяется

условием непротекания. Все наши дальнейшие теоретические построения мы будем основывать на модели идеальной жидкости.

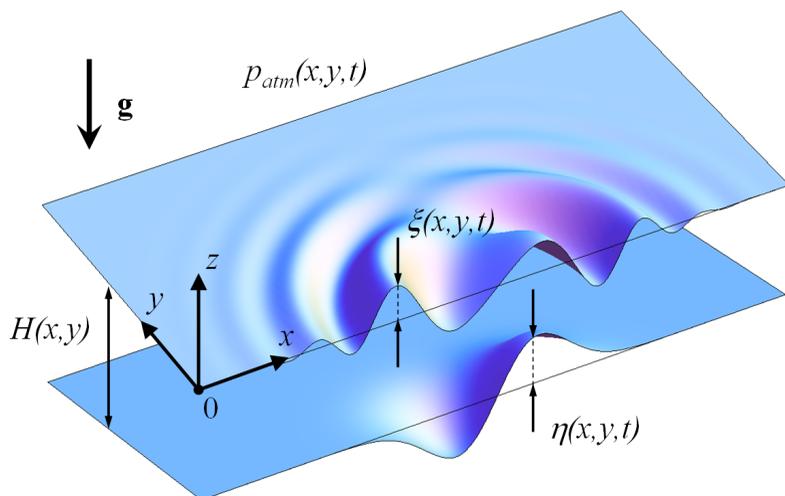


Рис. 2.1. Математическая постановка задачи

Итак, рассмотрим слой идеальной однородной жидкости переменной глубины на вращающейся Земле. Слой жидкости ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу – подвижным непроницаемым дном (Рис. 2.1). Начало локальной прямоугольной системы координат расположим на невозмущенной поверхности воды. Ось  $0z$  направим вертикально вверх, а оси  $0x$  и  $0y$  – на восток и на север соответственно. Будем полагать, что до момента времени  $t = 0$  поверхность дна была неподвижной, и ее положение описывалось уравнением  $z_b = -H(x, y)$ . При  $t > 0$  – в процессе землетрясения – поверхность дна приходит в движение, и теперь ее положение определяется уравнением  $z_b = -H(x, y) + \eta(x, y, t)$ , где  $\eta(x, y, t)$  – динамическая деформация дна. Атмосферное давление до момента времени  $t = 0$  будем полагать постоянным и не зависящим от горизонтальных координат  $p_{atm} = const$ . Вариации атмосферного давления в пространстве и во времени  $p_{atm} = p_{atm}(x, y, t)$  возникают при  $t > 0$ . Заметим, что при

описании метеоцунами обычно рассматриваются два источника: вариации атмосферного давления и напряжение трения ветра. Второй источник здесь мы не рассматриваем в силу того, что в рамках теории невязкой жидкости напряжение трения учтено быть не может.

Движения водного слоя, инициируемые динамической деформацией дна и/или вариациями атмосферного давления, будем характеризовать следующими величинами: смещением свободной поверхности воды от равновесного положения  $\xi(x, y, t)$ , скалярным полем давления  $p(x, y, z, t)$  и векторным полем скорости течения  $\mathbf{v}(x, y, z, t) \equiv (u, v, w)$ , где  $u$ ,  $v$  и  $w$  – компоненты скорости по осям  $0x$ ,  $0y$  и  $0z$  соответственно. Для описания движений водного слоя воспользуемся уравнением Эйлера, которое запишем с учетом силы тяжести и силы Кориолиса, и уравнением неразрывности [e.g. Lamb, 1993; Murty, 1977; Марчук и др., 1983; Ландау, Лифшиц, 1988; Пелиновский, 1996]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + 2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения силы тяжести,  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли.

Уравнения (2.1), (2.2) дополняются классическими граничными условиями на дне океана и на свободной поверхности воды. На поверхности воды (поверхности раздела «вода-воздух») предполагается непрерывность давления (динамическое условие)

$$p = p_{atm}(x, y, t) \text{ при } z = \xi(x, y, t), \quad (2.3)$$

где  $p_{atm}(x, y, t)$  – функция, описывающая пространственно-временное распределение атмосферного давления вдоль свободной поверхности воды. Кроме динамического условия, на свободной поверхности действует еще и кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w = 0, \quad (2.4)$$

физический смысл которого состоит в том, что частицы жидкости, принадлежащие поверхности, не могут перемещаться внутрь жидкого слоя.

На подвижном дне океана ставится условие непротекания: нормальная к поверхности дна компонента скорости течения должна быть равна скорости движения дна в этом же направлении:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = (\mathbf{v}_b, \mathbf{n}) \text{ при } z = -H(x, y) + \eta(x, y, t), \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{v}_b$  – вектор скорости движения дна,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности дна.

При моделировании динамики цунами путем численного интегрирования уравнений (2.1)-(2.5) в качестве начальных условий можно использовать нулевое смещение свободной поверхности  $\xi_0 = 0$ , нулевое поле скорости течения  $\mathbf{v}_0 = 0$  и гидростатическое распределение давления, определяемое из уравнения  $\nabla p_0 = \rho \mathbf{g}$ . Источником волн служит динамическая деформация дна  $\eta(x, y, t)$  и/или вариации атмосферного давления  $p_{atm}(x, y, t)$ .

Несмотря на то, что прямое численное моделирование обладает несомненным преимуществом полноты описания, его применение всегда сопряжено с трудоемкими вычислениями. Получить общее аналитическое решение системы (2.1)-(2.5), к сожалению, не представляется возможным. Но во многих частных случаях, при определенных допущениях, получение аналитического решения возможно. И такие аналитические решения часто могут сказать больше о физической сущности процесса, чем сотни численных экспериментов. В этой связи анализ динамики волн цунами целесообразно проводить в рамках различных приближений, одним из которых является приближение гидростатики, лежащее в основе теории длинных волн.

## 2.2. Теория длинных волн

Теория длинных волн (long wave theory), иногда еще называемая теорией мелкой воды (shallow water theory), строится на предположении, что глубина океана существенно меньше, чем длина волны:  $H/\lambda \ll 1$ . Рассматривая глубину океана в качестве

вертикального пространственного масштаба, а длину волны цунами – в качестве горизонтального масштаба, из уравнения неразрывности (2.2), записанного для несжимаемой жидкости ( $\rho = const$ )

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

получаем простое соотношение, связывающее амплитуды вертикальной ( $U_z$ ) и горизонтальной ( $U_{xy}$ ) скорости

$$U_z \sim \frac{H}{\lambda} U_{xy}. \quad (2.7)$$

Из соотношения (2.7) следует, что при выполнении условия  $H/\lambda \ll 1$  горизонтальные скорости существенно преобладают над вертикальными:  $U_{xy} \gg U_z$ . Аналогичный вывод можно сделать и относительно доминирования горизонтальных ускорений над вертикальными. Следовательно, в вертикальной компоненте уравнения Эйлера можно пренебречь малозначимыми вертикальными ускорениями.

Далее запишем компоненты силы Кориолиса, используя так называемое традиционное приближение. Согласно этому приближению пренебрегают вертикальной компонентой силы Кориолиса по сравнению с силой тяжести, а в  $x$ -компоненте силы Кориолиса пренебрегают членом, который пропорционален вертикальной скорости течения:

$$2[\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}] = 2 \begin{pmatrix} v|\boldsymbol{\omega}| \sin \varphi - w|\boldsymbol{\omega}| \cos \varphi \\ -u|\boldsymbol{\omega}| \sin \varphi \\ u|\boldsymbol{\omega}| \cos \varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v|\boldsymbol{\omega}| \sin \varphi \\ -2u|\boldsymbol{\omega}| \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} fv \\ -fu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где  $f = 2|\boldsymbol{\omega}| \sin \varphi$  – параметр Кориолиса,  $\varphi$  – широта.

Итак, отбросив в вертикальной компоненте уравнения Эйлера (2.1) вертикальные ускорения и вертикальную компоненту силы Кориолиса, приходим к уравнению гидростатики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.9)$$

Интегрируя уравнение (2.9) по вертикальной координате от некоторой точки  $z$  в толще водного слоя до свободной поверхности, получаем формулу для вычисления давления

$$p(x, y, z, t) = p_{atm} + \rho g[\xi(x, y, t) - z]. \quad (2.10)$$

Теперь обратимся к горизонтальным компонентам уравнения Эйлера (2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu. \quad (2.12)$$

В результате подстановки формулы (2.10) в уравнения (2.11) и (2.12) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} + fv, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{atm}}{\partial y} - fu. \quad (2.14)$$

Из уравнений (2.13) и (2.14) следует важнейшее свойство длинных волн: горизонтальные компоненты скорости не зависят от вертикальной координаты. Учитывая это свойство, проинтегрируем уравнение неразрывности (2.6) по вертикальной координате от дна  $z = -H + \eta$  до поверхности  $z = \xi$ . В итоге получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}((H + \xi - \eta)\mathbf{v}) = 0, \quad (2.15)$$

где оператор  $\text{div}$  действует в горизонтальной плоскости, а вектор скорости имеет только две компоненты:  $\mathbf{v} = (u, v)$ .

Уравнения (2.13)-(2.15) представляют собой систему уравнений нелинейной теории длинных волн (мелкой воды), которая часто применяется для моделирования волн цунами. Возбуждение волн может описываться путем задания функции  $\eta(x, y, t)$ , описывающей смещение поверхности дна. Другой вариант возбуждения волн – задание функции  $p_{atm}(x, y, t)$ , описывающей вариации атмосферного давления. Однако, чаще всего уравнения

(2.13)-(2.15) решаются в предположении  $\eta = 0$ ,  $p_{atm} = const$  с начальными условиями, представляющими собой некоторое начальное возвышение свободной поверхности  $\xi_0(x, y)$  при нулевом поле скорости  $\mathbf{v}_0 = 0$ .

При условии, что деформации океанического дна имеют малую амплитуду ( $|\eta|/H \ll 1$ ), смещение свободной поверхности также можно рассматривать как малую величину:  $|\xi|/H \ll 1$ . Введем горизонтальный масштаб длин  $\lambda$  (длина волны), вертикальный масштаб длин  $H$  (глубина) и масштаб времени  $T$  (период волны). Используя эти масштабы и связь (2.7), оценим относительную значимость нелинейного члена  $(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}$ :

$$|(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}|/|\partial\mathbf{v}/\partial t| \sim U_{xy}T/\lambda \sim U_zT/H \sim |\xi|/H \ll 1.$$

Пренебрегая в уравнениях (2.13)-(2.15) малыми величинами, приходим к линейным уравнениям теории длинных волн

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} + fv, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{atm}}{\partial y} - fu. \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}(H\mathbf{v}) = 0. \quad (2.18)$$

Линейные уравнения (2.16)-(2.18) могут быть с успехом использованы для описания динамики цунами на больших глубинах. На мелководье эти уравнения также могут быть применимы, но только для волн незначительной амплитуды.

Если в системе уравнений (2.16)-(2.18) пренебречь силой Кориолиса, то она легко может быть сведена к одному уравнению – неоднородному волновому уравнению. Положив в уравнениях (2.16), (2.17)  $f = 0$ , перепишем их в векторном виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -g \nabla \xi - \frac{\nabla p_{atm}}{\rho}, \quad (2.19)$$

где оператор  $\nabla$  действует в горизонтальной плоскости. В силу того, что мы исключили единственный в рассматриваемом случае вихреобразующий фактор (силу Кориолиса), то, без потери

общности, поле скорости можно выразить через потенциал скорости течения

$$\mathbf{v} = (u, v) = \nabla F. \quad (2.20)$$

Подставляя представление (2.20) в уравнение (2.19), получаем

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{p_{atm}}{\rho g}. \quad (2.21)$$

Подстановка выражений (2.20) и (2.21) в уравнение (2.18) дает искоемое неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla F) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{atm}}{\partial t} - g \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Форма волнового уравнения (2.22) позволяет заключить, что длинные волны распространяются со скоростью  $c = \sqrt{gH}$ , – квадрат именно этой величины стоит на должном месте в волновом уравнении. Правая часть уравнения (2.22) описывает два типа источников цунами: движения дна и вариации атмосферного давления. Видно, что источник волн является ненулевым только в том случае, когда имеют место движения дна, либо изменения атмосферного давления. Поле скорости течения и смещение свободной поверхности рассчитываются по известному потенциалу с использованием формул (2.20) и (2.21) соответственно.

В некоторых случаях бывает удобно использовать волновое уравнение, записанное не в терминах потенциала скорости течения, а в терминах смещения свободной поверхности. Получить такую форму уравнения можно следующим образом. Продифференцируем уравнение (2.18) по времени, а затем подставим в него ускорение  $\partial \mathbf{v} / \partial t$ , выраженное из формулы (2.19). В итоге элементарных преобразований получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla \xi) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \operatorname{div} \left( \frac{H}{\rho} \nabla p_{atm} \right). \quad (2.23)$$

Граничные условия на береговой линии для уравнений (2.22) или (2.23) обычно представляют собой условие полного отражения (непротекания):  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – нормаль к линии берега. В терминах потенциала (смещения свободной поверхности) это условие имеет вид  $\partial F / \partial \mathbf{n} = 0$  ( $\partial \xi / \partial \mathbf{n} = 0$ ). Начальные условия

должны быть поставлены как на саму функцию, так и на ее производную по времени: при  $t = 0$ :  $F = F_0$ ,  $\partial F / \partial t = G_0$  ( $\xi = \xi_0$ ,  $\partial \xi / \partial t = w_0$ ). Физически эти условия означают задание начального смещения свободной поверхности и начального поля скорости течения.

### 2.3. Потенциальная теория несжимаемой жидкости

В ряде случаев волны цунами могут быть недостаточно длинными для безусловного соответствия требованию  $H / \lambda \ll 1$ . Здесь на помощь приходит потенциальная теория, в которой нет ограничений на длину волны. Образно говоря, потенциальная теория занимает более высокую позицию в иерархии приближений, чем теория длинных волн. Впрочем, в потенциальной теории не может быть учтено действие силы Кориолиса.

В соответствии с теоремой Гельмгольца, произвольное векторное поле выражается через скалярный ( $F$ ) и векторный ( $\mathbf{G}$ ) потенциалы:  $\mathbf{v} = \nabla F + \nabla \times \mathbf{G}$ . Потенциальная теория основана на предположении, что поле скорости течения может быть представлено посредством единственной скалярной величины – потенциала скорости течения:

$$\mathbf{v} \equiv (u, v, w) = \nabla F. \quad (2.24)$$

Представление (2.24), разумеется, имеет силу не всегда, а только при условии, что течение является безвихревым. В этой связи уравнение (2.1) будем в дальнейшем использовать без учета вихреобразующего фактора – силы Кориолиса – в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (2.25)$$

Подставляя представление (2.24) в уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости (2.6), приходим к основному уравнению потенциальной теории – уравнению Лапласа:

$$\Delta F = 0. \quad (2.26)$$

Сформулируем граничные условия для уравнения Лапласа. Граничное условие на свободной поверхности  $z = \xi$  выводится с

применением динамического уравнения (2.25), из которого следует

$$\nabla \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0. \quad (2.27)$$

Выражение, стоящее под знаком градиента в формуле (2.27), очевидно, не зависит от пространственных координат, но оно может зависеть от времени

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t), \quad (2.28)$$

где  $f(t)$  – произвольная функция. В уравнении (2.28), которое именуется уравнение Бернулли, без ограничения общности функция  $f(t)$  может быть положена равной нулю

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0. \quad (2.29)$$

Действительно, в силу того, что поле скорости определяется производными потенциала по пространственным координатам, к величине  $F$  может быть прибавлена любая функция времени, – на поле скорости это никак не скажется.

Граничное условие на свободной поверхности жидкости (при  $z = \xi$ ) с учетом условия непрерывности давления (2.3) имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{(\nabla F)^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\rho} + g\xi = 0. \quad (2.30)$$

Выражение (2.30) следует дополнить кинематическим условием (2.4), которое в терминах потенциала записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (2.31)$$

На непроницаемом подвижном дне океана действует условие непротекания (2.5), которое мы также запишем в терминах потенциала:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{v}_b, \mathbf{n}) \quad \text{при } z = -H(x, y) + \eta(x, y, t). \quad (2.32)$$

Что касается начальных условий, то мы можем при  $t = 0$  задать исходное возмущение свободной поверхности, определяемое произвольной функцией  $\xi_0(x, y)$ . Кроме того, мы можем задать некоторый потенциал скоростей, удовлетворяющий, конечно, уравнению Лапласа и граничным условиям, определив тем самым исходное поле скорости  $\mathbf{v}_0(x, y, z)$ .

Задача (2.26), (2.30)-(2.32) сильно упрощается, если предположить, что деформации дна, а также вызванные ими смещения свободной поверхности и скорости течения – малые величины. В этом случае, отбросив в формулах (2.30) и (2.31) нелинейные члены, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p_{atm}}{\rho} + g\xi = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (2.34)$$

Далее предположим, что атмосферное давление постоянно вдоль свободной поверхности ( $p_{atm} = const$ ). Тогда потенциал целесообразно переопределить (путем вычитания из него величины  $p_{atm}t/\rho$ ) и выражение (2.33) трансформируется к виду

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Подставляя формулу (2.35) в уравнение (2.34), получаем линеаризованное граничное условие на свободной поверхности

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0. \quad (2.36)$$

Заметим, что в силу малости смещения свободной поверхности, граничное условие (2.36) возможно ставить не на неизвестной свободной поверхности  $z = \xi$ , а на близкой к ней поверхности  $z = 0$ .

Граничное условие на дне (2.32) – также по причине малости смещений дна – сносится на невозмущенную поверхность дна

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{v}_b, \mathbf{n}) \text{ при } z = -H(x, y). \quad (2.37)$$

При этом дополнительно предполагается, что в процессе малых деформаций дна глубина океана, а также поле нормалей к поверхности дна остаются неизменными.

Уравнение Лапласа (2.26) с граничными условиями (2.36) и (2.37), дополненное описанными выше начальными условиями, представляет собой задачу Коши-Пуассона, сформулированную в рамках линейной потенциальной теории несжимаемой жидкости.

## 2.4. Потенциальная теория сжимаемой жидкости

Общая постановка задачи, рассматриваемой в этом разделе, остается идентичной той, которая была описана в разделе 2.1 и представлена на Рис. 2.1. Все обозначения, введенные в разделе 2.1, также остаются в силе. Как и в разделе 2.3 мы пренебрежем силой Кориолиса. В силу того, что период гидроакустических волн заведомо много меньше земных суток, эффекты вращения Земли не должны оказывать заметного влияния на гидроакустические волны.

Для гидродинамического описания движений сжимаемого водного слоя мы вновь воспользуемся уравнением Эйлера, в котором плотность воды уже не является константой, а зависит от давления

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (2.38)$$

уравнением неразрывности для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.39)$$

и уравнением состояния баротропной жидкости

$$\rho = \rho(p). \quad (2.40)$$

Систему уравнений (2.38)-(2.40) дополним граничными условиями. Как и в случае несжимаемой жидкости, на свободной поверхности сжимаемой жидкости также действуют динамическое (2.3) и кинематическое (2.4) граничные условия. В динамическом условии (2.3) атмосферное давление вдоль свободной поверхности воды  $p_{atm}$  будем полагать неизменным в пространстве и во

времени. На подвижном дне сжимаемого водного слоя сохраняет силу условие непротекания (2.5).

В качестве начальных условий предположим нулевое смещение свободной поверхности  $\xi_0 = 0$  и нулевое поле скорости  $\mathbf{v}_0 = 0$ . При этом жидкость будет находиться в состоянии гидростатического равновесия, и начальные распределения давления  $p_0(z)$  и плотности  $\rho_0(z)$  будут связаны уравнением гидростатики

$$\frac{\nabla p_0}{\rho_0} = \mathbf{g}. \quad (2.41)$$

Движения сжимаемого водного слоя, создаваемые динамической деформацией дна океана, будем рассматривать как отклонение от гидростатического равновесия. В этом случае поля скорости течения, давления и плотности целесообразно представить как сумму статической ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ,  $p_0(z)$ ,  $\rho_0(z)$ ) и динамической ( $\mathbf{v}'(x, y, z, t)$ ,  $p'(x, y, z, t)$ ,  $\rho'(x, y, z, t)$ ) частей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'(x, y, z, t), \quad (2.42)$$

$$p = p_0(z) + p'(x, y, z, t), \quad (2.43)$$

$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t). \quad (2.44)$$

Подстановка представлений (2.42)-(2.44) в уравнения (2.38) и (2.39) при учете (2.41) дает следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}', \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{\nabla p'}{\rho_0 + \rho'} + \frac{\rho' \mathbf{g}}{\rho_0 + \rho'}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}') = 0. \quad (2.46)$$

Подчеркнем, что уравнения (2.45) и (2.46) получены путем тождественных преобразований без применения каких-либо упрощающих предположений. Поэтому они также сложны для решения, как и исходные уравнения. Существенное упрощение этих уравнений возможно, если предположить, что отклонения от гидростатического равновесия обязаны акустическим и гравитационным волнам, имеют малую амплитуду. Полагая величины  $\mathbf{v}'$ ,  $p'$  и  $\rho'$  малыми, получаем следующую линейную систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\rho' \mathbf{g}}{\rho_0}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}') = 0. \quad (2.48)$$

Помимо уравнений (2.45), (2.46), линеаризации подлежат, конечно, и граничные условия (2.30)-(2.32). Соответствующая процедура описана в разделе 2.3, ее результатом являются формулы (2.36) и (2.37).

Малые вариации плотности  $\rho'$  и давления  $p'$  связаны между собой формулой, вытекающей из уравнения состояния (2.40)

$$\rho' = p' / c_{ac}^2, \quad (2.49)$$

где  $c_{ac} = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s} \approx 1500 \text{ м/с}$  – скорость звука в воде. В формуле для скорости звука производная берется при постоянной энтропии, в силу того, что процесс сжатия и разрежения в акустической волне предполагается адиабатическим.

Последний член в правой части уравнения (2.47) описывает действие силы плавучести. Значимость силы плавучести можно оценить, рассчитав отношение абсолютных величин второго и первого членов в правой части уравнения (2.47). С учетом формулы (2.49) получаем следующую оценку:

$$\frac{|\rho' \mathbf{g}|}{|\nabla p'|} \sim \frac{g\lambda}{c_{ac}^2}, \quad (2.50)$$

где  $\lambda$  – длина акустической волны. Из полученного выражения следует, что существенное влияние силы плавучести на акустические волны возможно, когда длина волн сопоставима с величиной  $c_{ac}^2 / g \approx 230 \text{ км}$ . Длина акустических волн, ограниченная сверху глубиной океана  $\lambda_{\max} \leq 4H$ , всегда заметно меньше 230 км. Поэтому силой плавучести в уравнении (2.47) целесообразно пренебречь. В итоге приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}, \quad (2.51)$$

Дальнейшему упрощению подлежит также и уравнение (2.48). Напомним, что плотность  $\rho_0$  не является константой. Поэтому в

уравнении (2.51), вообще говоря, величину  $\rho_0$  нельзя выносить из под знака  $div$ . Покажем, что на самом деле изменения плотности  $\rho_0$  невелики, и, следовательно, этими изменениями можно пренебречь. Используя известную формулу векторного анализа  $div(\varphi \mathbf{A}) = \varphi div(\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot grad(\varphi)$  и учитывая что  $\rho_0$  зависит только от вертикальной координаты, получаем

$$div(\rho_0 \mathbf{v}') = \rho_0 div(\mathbf{v}') + w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (2.52)$$

Оценим члены в правой части выражения (2.52)

$$|\rho_0 div(\mathbf{v}')| \sim \frac{\rho_0 U}{\lambda}, \quad (2.53)$$

$$\left| w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right| \sim \frac{U \rho_0 g}{c_{ac}^2}, \quad (2.54)$$

где  $U$  – амплитуда скорости в акустической волне. При получении оценки (2.54) мы учли связь между малыми вариациями плотности и давления (2.49), а также тот факт, что перепад гидростатического давления между поверхностью и дном составляет  $\Delta p_0 \approx \rho_0 g H$ . Сопоставляя (2.53) и (2.54), получаем

$$\left| w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right| / |\rho_0 div(\mathbf{v}')| \sim \frac{g \lambda}{c_{ac}^2}. \quad (2.55)$$

Примечательно, что оценки (2.50) и (2.55) оказываются идентичными. Из формулы (2.55), по причине, которую мы уже указывали выше, следует, что слабыми изменениями плотности  $\rho_0$  в (2.48) можно пренебречь. Вынося в уравнении (2.48) величину  $\rho_0$  за знак  $div$ , получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div(\mathbf{v}') = 0. \quad (2.56)$$

Система уравнений (2.51), (2.56) представляет собой классическую систему уравнений линейной гидроакустики [e.g. Ландау, Лифшиц, 1988; Tolstoy, Clay, 1987; Бреховских, Лысанов, 2007].

Система (2.51), (2.56) может быть сведена к единственному уравнению – однородному волновому уравнению. Для этого следует предположить потенциальность поля скорости течения и ввести потенциал

$$\mathbf{v}' = \nabla F. \quad (2.57)$$

Подстановка представления (2.57) в уравнение (2.51) дает формулу, связывающую динамическое давление и потенциал

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.58)$$

Выражая вариации плотности  $\rho'$  в уравнении (2.56) через вариации давления  $p'$  посредством формулы (2.49), получаем

$$\frac{1}{c_{ac}^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}') = 0. \quad (2.59)$$

Подстановка скорости  $\mathbf{v}'$  и давления  $p'$ , выраженных формулами (2.57) и (2.58), в выражение (2.59) дает искомое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c_{ac}^2 \Delta F = 0. \quad (2.60)$$

Волновое уравнение (2.60) следует дополнить линеаризованными граничными условиями на свободной поверхности (2.36) и на дне океана (2.37). Еще раз отметим, что в теории сжимаемой и несжимаемой жидкости граничные условия идентичны.

По известному потенциалу  $F$  поле скорости течения может быть рассчитано с применением формулы (2.57), а поле динамического давления – с применением формулы (2.58). Смещение свободной поверхности определяется формулой (2.35) из предыдущего раздела.

В качестве начальных условий для задачи (2.60), (2.36), (2.37) при  $t=0$  задается нулевое значение потенциала  $F=0$ , а также нулевое значение производной потенциала по времени  $\partial F / \partial t = 0$ . Физически первое условие означает нулевое начальное поле скорости течения ( $\mathbf{v}'|_{t=0} = 0$ ), а второе – нулевое отклонение распределения давления от гидростатического равновесия ( $p'|_{t=0} = 0$ ). Возмущение в систему вводится через граничное условие на дне (2.37) путем задания пространственно-временного закона движения дна, а именно путем задания векторного поля  $\mathbf{v}_b$ .

Волновое уравнение (2.60) с граничными условиями (2.36) и (2.37), дополненное описанными выше начальными условиями, представляет собой задачу Коши-Пуассона, сформулированную в рамках линейной потенциальной теории сжимаемой жидкости. Решение этой задачи описывает акустические и гравитационные волны, возбуждаемые в водном слое динамическими деформациями дна малой амплитуды. Заметим, что соответствующая задача для несжимаемой жидкости (2.26), (2.36), (2.37) является предельным случаем задачи для сжимаемой жидкости при  $c_{ac} \rightarrow \infty$ .

## Глава 3

# БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА ВОЛН

В этой главе мы рассмотрим некоторые базовые свойства гравитационных и акустических волн в водном слое, которые важны для понимания особенностей динамики волн цунами и сопутствующих явлений. Первый раздел посвящен приближению длинных волн, второй – потенциальной теории несжимаемой жидкости, третий – гидроакустическим волнам. В главе рассматриваются исключительно задачи о распространении волн, вопросы генерации цунами будут изложены в последующих главах.

### 3.1. Длинные волны

В разделе 2.2. было показано, что при пренебрежении эффектами вращения Земли длинные волны малой амплитуды в океане описываются неоднородным волновым уравнением (2.22). Здесь мы не будем рассматривать причину формирования длинных волн, а ограничимся только процессом их распространения. Поэтому в уравнении (2.22) правую часть, которая описывает действие источников волн, положим равной нулю. Если кроме того предположить, что глубина океана не зависит от горизонтальных координат, то из (2.22) получаем классическое однородное волновое уравнение с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - gH\Delta F = 0, \quad (3.1)$$

где  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа, включающий только горизонтальные производные. Решением уравнения (3.1) является плоская или кольцевая волна произвольной формы, бегущая со скоростью  $\sqrt{gH}$ . Формальным ограничением является достаточная гладкость формы волны, обеспечивающая

возможность вычисления производных. Скорость распространения длинных волн не зависит от длины волны, поэтому эти волны не подвержены фазовой дисперсии.

Энергия бегущей волны представляет собой сумму потенциальной и кинетической энергий

$$E = E_p + E_k,$$

$$E_p = 0.5\rho g \iint \xi^2 ds, \quad (3.2)$$

$$E_k = 0.5\rho H \iint v^2 ds, \quad (3.3)$$

где  $\rho$  – плотность воды. Потенциальная энергия оценивается по смещению свободной поверхности от равновесного положения, кинетическая энергия – по скорости горизонтального течения, которая не зависит от вертикальной координаты.

В линейной бегущей волне потенциальная и кинетическая энергии равны. Это легко показать на примере плоской гармонической волны, бегущей вдоль оси  $0x$ . Заметим, что линейную волну любой иной формы можно представить набором гармонических волн. В терминах потенциала скорости течения гармоническая волна описывается выражением

$$F(x, t) \sim e^{i(\omega t - kx)}, \quad (3.4)$$

где  $\omega$  – циклическая частота,  $k$  – волновое число. Смещение свободной поверхности вычисляется по потенциалу в соответствии с формулой (2.21), в которой мы полагаем  $p_{atm} = 0$  (т.е. предполагается  $p_{atm} = const$ , а потенциал переопределяется так, как это описано в разделе 2.3)

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{i\omega}{g} F. \quad (3.5)$$

Скорость течения вдоль оси  $0x$  определяется формулой

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} = -ikF. \quad (3.6)$$

Переходя в формулах (3.2) и (3.3) к одномерным интегралам и учитывая связи (3.5) и (3.6), получаем удельные величины потенциальной и кинетической энергий на единицу длины фронта волны:

$$E_p = 0.5\rho g \int \xi^2 dx = 0.5\rho g \frac{\omega^2}{g^2} \int (iF)^2 dx . \quad (3.7)$$

$$E_k = 0.5\rho H \int u^2 dx = 0.5\rho H k^2 \int (iF)^2 dx . \quad (3.8)$$

С учетом дисперсионного соотношения для длинных волн  $\omega^2 = gHk^2$  из выражений (3.7) и (3.8) следует, что потенциальная и кинетическая энергии равны. Поэтому для вычисления полной энергии бегущей волны можно опираться и на потенциальную, и на кинетическую энергии:  $E = 2E_p = 2E_k$ .

Далее рассмотрим кольцевую волну, которая распространяется от некоторого локализованного осесимметричного источника. Из формул (3.2) и (3.3) следует, что энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды смещения свободной поверхности ( $A$ ) или квадрату амплитуды скорости горизонтального течения ( $U$ ). При достаточно большом удалении от источника кольцевое волновое возмущение сосредоточено вблизи окружности радиуса  $r = t\sqrt{gH}$ , где  $t$  – время распространения волны. По мере удаления волны от источника длина волнового фронта возрастает, а амплитуды смещения свободной поверхности и скорости горизонтального течения должны уменьшаться таким образом, чтобы выполнялся закон сохранения энергии:

$$A^2 r = const . \quad (3.9)$$

$$U^2 r = const . \quad (3.10)$$

Из формул (3.9) и (3.10) следует, что при удалении от источника амплитуды смещения и скорости убывают весьма медленно – по законам  $A \sim 1/\sqrt{r}$  и  $U \sim 1/\sqrt{r}$ . Медленность убывания амплитуды длинных волн с расстоянием позволяет характеризовать цунами как дальнодействующую природную катастрофу.

Зависимость скорости распространения длинных волн от глубины океана делает эти волны чувствительными к формам рельефа дна. Длинным волнам, распространяющимся в бассейне с переменной глубиной, присущи эффекты рефракции, отражения и рассеяния. Но, кроме того, изменения глубины океана приводят к значимому изменению амплитуды волн.

Предположим, что плоская волна распространяется вдоль некоторой трассы с медленно меняющейся глубиной (одномерная задача). Пусть глубина меняется настолько медленно, что можно пренебречь отражением волн. В этом случае поток энергии  $Q$ , переносимый волнами вдоль трассы, остается неизменным. Поток энергии пропорционален энергии волны, помноженной на скорость ее распространения. В силу того, что для длинных волн нет различия в групповой и фазовой скорости, мы здесь не уточняем, о какой именно скорости идет речь. Поток энергии длинных волн можно определить, опираясь как на потенциальную, так и на кинетическую энергии

$$Q \sim A^2 \sqrt{gH}, \quad (3.11)$$

$$Q \sim U^2 H \sqrt{gH}. \quad (3.12)$$

Предполагая неизменность потока  $Q$ , из формулы (3.11) получаем закон изменения амплитуды смещения свободной поверхности в длинной волне, распространяющейся вдоль трассы переменной глубины:

$$A \cdot H^{1/4} = const. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) носит название «закон Грина» или закон «1/4». Из формулы (3.13) следует, что уменьшение глубины океана сопровождается увеличением амплитуды волны. Закон Грина указывает на одну из основных причин, по которой амплитуда цунами возрастает при выходе на мелководье или при подходе к берегу.

Формула (3.12) и предположение о постоянстве потока  $Q$  приводят к закономерности, определяющей, каким образом меняется амплитуда скорости течения в волне при изменении глубины:

$$U \cdot H^{3/4} = const. \quad (3.14)$$

Из сопоставления формул (3.13) и (3.14) можно сделать заключение, что при уменьшении глубины амплитуда скорости горизонтального течения растет существенно быстрее, чем амплитуда смещения свободной поверхности. Предположим, что вдоль трассы распространения волны глубина уменьшилась в  $10^4$  раз (с 10 км до 1 м). При этом величина  $A$  возрастет в 10 раз, а величина  $U$  – в 1000 раз. Здесь уместно напомнить, что опасность

цунами определяется не только большими высотами волн у побережья, но еще и высокими скоростями течений, которые могут представлять серьезную угрозу мореплаванию.

Далее рассмотрим влияние вращения Земли на распространение длинных волн. Запишем уравнения (2.16)-(2.18), предполагая, что атмосферное давление и глубина океана постоянны, а дно неподвижно

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + fv, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - fu. \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Выразим произвольное плоское векторное поле скорости течения через потенциал скорости течения  $F$  и функцию тока  $\psi$  (возможность такого представления следует из теоремы Гельмгольца)

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.18)$$

Подставим выражения (3.18) в систему (3.15)-(3.17). Уравнение (3.17) сразу преобразуется к виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + H \Delta F = 0. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.15) продифференцируем по  $x$ , а уравнение (3.16) – по  $y$ . Складывая полученные выражения и отбрасывая оператор Лапласа, который фигурирует в каждом члене уравнения, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -g\xi - f\psi. \quad (3.20)$$

Теперь продифференцируем уравнения скрестно: (3.15) – по  $y$ , а (3.16) – по  $x$  и вычтем одно уравнение из другого. В итоге получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = fF. \quad (3.21)$$

Уравнения (3.19)-(3.21) представляют собой систему уравнений линейной теории длинных волн во вращающемся океане, которая записана в переменных потенциал, функция тока, смещение свободной поверхности [Носов и др., 2014].

Путем элементарных преобразований система (3.19)-(3.21) может быть сведена к трем уравнениям Клейна-Гордона [Нурисламова, Носов, 2017]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH \Delta \xi + f^2 \xi = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - gH \Delta F + f^2 F = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - gH \Delta \psi + f^2 \psi = 0. \quad (3.24)$$

Примечательно, что каждое из полученных уравнений записано относительно только одной из переменных. Следовательно, для полного решения задачи достаточно определить только одну искомую функцию, например, потенциал скорости течения. Остальные искомые функции (смещение свободной поверхности и функция тока) могут быть определены по потенциалу.

В заключение раздела остановимся на фазовой дисперсии длинных волн, которая возникает при учете вращения Земли. Пусть во вращающемся океане в положительном направлении оси  $Ox$  бежит плоская волна вида (3.4). Заметим, что направление распространения волны может быть выбрано произвольно, – на результат это никак не повлияет. Подставляя выражение (3.4) в уравнение (3.23), получаем связь между циклической частотой и волновым числом (дисперсионное соотношение):

$$\omega^2 = gHk^2 + f^2. \quad (3.25)$$

Дисперсионное соотношение (3.25) известно в динамике вращающейся жидкости [Dijkstra, 2008; Grimshaw et al., 1998]. Из него можно получить выражения для фазовой и групповой скорости длинных волн во вращающемся океане

$$C_{ph} \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH + f^2 / k^2}, \quad (3.26)$$

$$C_{gr} \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{gH}{\sqrt{gH + f^2/k^2}}. \quad (3.27)$$

Из выражений (3.26) и (3.27) видно, что фазовая и групповая скорости не равны между собой и зависят от волнового числа (или длины волны). Следовательно, вращение Земли приводит к дисперсии длинных волн.

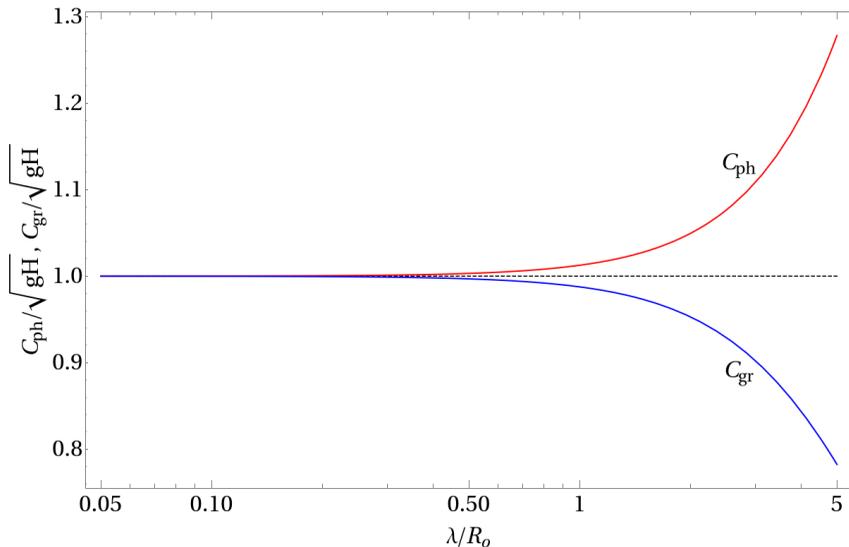


Рис. 3.1. Зависимость фазовой ( $C_{ph}$ ) и групповой ( $C_{gr}$ ) скоростей длинных волн во вращающемся океане от длины волны

Для выявления условий, при которых дисперсия, обязанная вращению Земли, может оказывать заметное воздействие на длинные волны, выражения (3.26) и (3.27) целесообразно преобразовать к следующему (безразмерному) виду:

$$\frac{C_{ph}}{\sqrt{gH}} = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{R_o^2 4\pi^2}}, \quad (3.28)$$

$$\frac{C_{gr}}{\sqrt{gH}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{R_o^2 4\pi^2}}}, \quad (3.29)$$

где  $R_o = \sqrt{gH}/f$  – баротропный радиус деформации Россби,  $\lambda = 2\pi/k$  – длина волны.

Зависимости (3.28) и (3.28) представлены на Рис. 3.1. По горизонтальной оси отложено отношение длины волны к баротропному радиусу деформации Россби  $R_o$ , по оси ординат – отношение фазовой/групповой скорости к скорости длинных волн  $\sqrt{gH}$ . Из рисунка видно, что заметные проявления дисперсии можно ожидать только для тех волн, длина которых сопоставима с радиусом Россби или превосходит его. Заметим, что речь идет об очень длинных волнах, т.к. в открытом океане в умеренных широтах типичное значение радиуса Россби  $R_o \approx 2000$  км (при  $H = 4$  км,  $f = 10^{-4} c^{-1}$ ). Длина волн цунами, как правило, заметно меньше радиуса Россби.

### 3.2. Потенциальные волны в несжимаемой жидкости

В этом разделе мы остановимся на основных элементах классической линейной потенциальной теории волн на воде. Математическая постановка соответствующей задачи описана в разделе 2.2. Основные уравнения линейной потенциальной теории – уравнение Лапласа (2.26), дополненное линеаризованными граничными условиями на свободной поверхности (2.36) и на дне (2.37).

Задачу будем решать в предположении, что водный слой имеет фиксированную глубину  $H$ , а дно является неподвижным. Эффекты генерации цунами движениями дна здесь мы не рассматриваем. С учетом означенных предположений граничное условие на дне (2.36) существенно упрощается и принимает следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H. \quad (3.30)$$

Решение уравнения Лапласа (2.26) находим методом разделения переменных. Пусть гармоническая волна, характеризующаяся циклической частотой  $\omega$ , распространяется в горизонтальном направлении. Подставляя представление для потенциала

$$F(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)e^{i\omega t}, \quad (3.31)$$

в уравнение Лапласа (2.26), получаем

$$X''_{xx}YZ + XY''_{yy}Z + XYZ''_{zz} = 0. \quad (3.32)$$

Выражение (3.32) делим на  $XYZ$  и переносим третий член в правую часть, приравнявая его квадрату волнового числа, взятому со знаком минус

$$\frac{X''_{xx}}{X} + \frac{Y''_{yy}}{Y} = -\frac{Z''_{zz}}{Z} = -k^2. \quad (3.33)$$

Соотношение (3.33) дает основание записать следующие три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''_{xx} + m^2X = 0, \quad (3.34)$$

$$Y''_{yy} + n^2Y = 0, \quad (3.35)$$

$$Z''_{zz} - k^2Z = 0, \quad (3.36)$$

где  $m$  и  $n$  – компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$  по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно ( $k^2 = m^2 + n^2$ ).

Решения уравнений (3.34)-(3.36) хорошо известны:

$$X(x) = C_1 e^{imx} + C_2 e^{-imx}, \quad (3.37)$$

$$Y(y) = C_3 e^{iny} + C_4 e^{-iny}, \quad (3.38)$$

$$Z(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz), \quad (3.39)$$

где  $C_j$ ,  $A$ ,  $B$  – произвольные константы.

Из выражений (3.37)-(3.39) видно, что выбор знака перед величиной  $k^2$  в формуле (3.33) был сделан правильно. Величина  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны, является действительной, поэтому решение уравнения Лапласа только в горизонтальном направлении представляет из себя осциллирующую функцию (волну). Поведение решения в вертикальном направлении определяется гиперболическими функциями, т.е. оно экспоненциально затухает или возрастает (рост ограничен из-за конечной толщины водного слоя).

Принимая во внимание (3.31) и (3.37)-(3.39), можно записать общий вид решения уравнения Лапласа, которое соответствует плоской гармонической волне, распространяющейся в горизонтальном направлении:

$$F(x, y, z, t) = [A \cosh(kz) + B \sinh(kz)] e^{i(\omega t - mx - ny)}. \quad (3.40)$$

Далее, для наглядности и простоты, обратимся к двумерной задаче в вертикальной плоскости  $0xz$ . Общее решение (3.40) при этом трансформируется к виду

$$F(x, z, t) = [A \cosh(kz) + B \sinh(kz)] e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.41)$$

Потенциал вида (3.41) должен удовлетворять граничному условию на свободной поверхности (2.36). В результате использования этого условия находим связь между коэффициентами

$$B = A \frac{\omega^2}{gk}. \quad (3.42)$$

Подстановка (3.42) в (3.41) дает

$$F(x, z, t) = A \left[ \cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.43)$$

Потенциал (3.43) должен удовлетворять граничному условию на дне (3.30). В результате использования условия на дне получаем

$$-\sinh(kH) + \frac{\omega^2}{gk} \cosh(kH) = 0. \quad (3.44)$$

Выражение (3.44) легко преобразуется к следующему виду:

$$\omega^2 = gk \tanh(kH). \quad (3.45)$$

Формула (3.45) именуется дисперсионным соотношением для гравитационных волн на воде. Дисперсионное соотношение устанавливает однозначную связь между циклической частотой и волновым числом или, иными словами, между временным и пространственным масштабами волны.

Дисперсионное соотношение играет важнейшую роль в физике волн. В частности, по этому соотношению можно определить фазовую ( $C_{ph} = \omega / k$ ) и групповую ( $C_{gr} = d\omega / dk$ ) скорости волн. Фазовая скорость – это скорость движения фазы волны, например, скорость перемещения гребня волны или ее подошвы. Групповая скорость – это скорость перемещения огибающей волнового

пакета. Перенос энергии происходит именно с групповой скоростью.

Воспользовавшись дисперсионным соотношением (3.45), получаем явные выражения для фазовой и групповой скоростей гравитационных волн на воде:

$$C_{ph} = \frac{\sqrt{gk \tanh(kH)}}{k}, \quad (3.46)$$

$$C_{gr} = \frac{g(kH / \cosh^2(kH) + \tanh(kH))}{2\sqrt{gk \tanh(kH)}}. \quad (3.47)$$

Дисперсионное соотношение (3.45), а также выражения для фазовой и групповой скоростей (3.46), (3.47) удобно представить в безразмерном виде. Для перехода к безразмерным переменным в качестве масштаба длин будем использовать глубину океана  $H$ , в качестве масштаба скорости – скорость длинных волн  $\sqrt{gH}$ , а в качестве масштаба времени – время распространения длинной волны на расстояние, равное глубине океана  $\sqrt{H/g}$  (безразмерные переменные обозначим знаком «\*»):

$$k^* = kH, \quad C_{ph}^* = \frac{C_{ph}}{\sqrt{gH}}, \quad C_{gr}^* = \frac{C_{gr}}{\sqrt{gH}}, \quad \omega^* = \omega \sqrt{\frac{H}{g}}. \quad (3.48)$$

В итоге несложных преобразований приходим к выражениям, которые являются «универсальными» для всех глубин и величин ускорения силы тяжести:

$$\omega^{*2} = k^* \tanh(k^*), \quad (3.49)$$

$$C_{ph}^* = \frac{\sqrt{k^* \tanh(k^*)}}{k^*}, \quad (3.50)$$

$$C_{gr}^* = \frac{k^* / \cosh^2(k^*) + \tanh(k^*)}{2\sqrt{k^* \tanh(k^*)}}. \quad (3.51)$$

Зависимости фазовой и групповой скорости от длины волны ( $\lambda = 2\pi/k$ ), построенные в соответствии с формулами (3.50) и (3.51), представлены на Рис. 3.2. Гравитационным волнам присуща так называемая нормальная дисперсия, при которой фазовая и групповая скорости растут с увеличением длины волны. При этом фазовая скорость превышает групповую. Из рисунка видно, что и

групповая, и фазовая скорости всегда меньше, чем скорость длинных волн, которая показана на графике пунктирной линией:

$$C_{gr} < C_{ph} < \sqrt{gH} .$$

В предельном случае бесконечно длинных волн или волн на «мелкой воде» ( $kH \rightarrow 0$ ) дисперсионное соотношение (3.45) принимает вид:

$$\omega^2 = gH k^2 . \quad (3.52)$$

При этом фазовая и групповая скорости асимптотически стремятся к общему пределу – скорости длинных волн:

$$\lim_{kH \rightarrow 0} C_{gr} = \lim_{kH \rightarrow 0} C_{ph} = \sqrt{gH} . \quad (3.53)$$

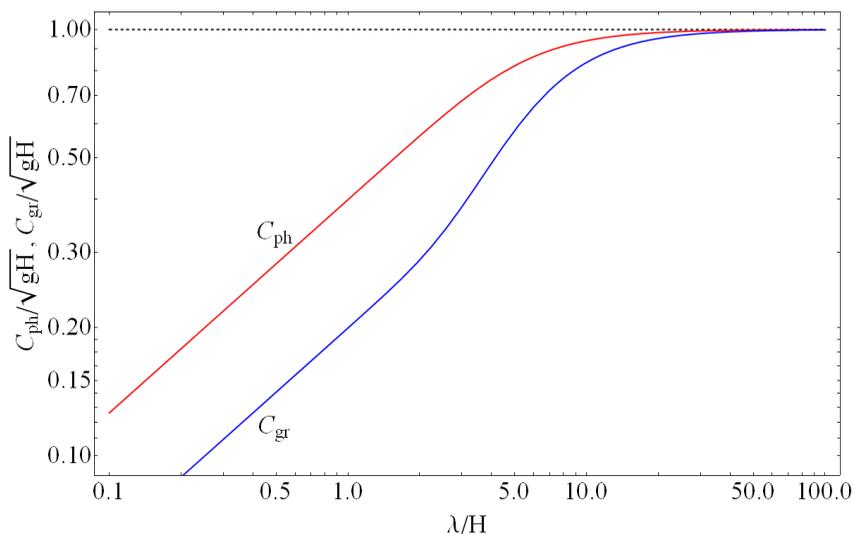


Рис. 3.2. Зависимость фазовой и групповой скоростей гравитационных волн от длины волны

Модельный объект, именуемый длинные волны, характеризуется отсутствием фазовой дисперсии: скорость распространения волн не зависит от волнового числа.

Другой предельный случай соответствует коротким волнам или бесконечно глубокому морю ( $kH \rightarrow \infty$ ). В этом случае дисперсионное соотношение преобразуется к виду:

$$\omega^2 = gk. \quad (3.54)$$

Фазовая скорость волн в бесконечно глубоком море двукратно превосходит групповую:

$$\lim_{kH \rightarrow \infty} C_{ph} = \sqrt{g/k}, \quad (3.55)$$

$$\lim_{kH \rightarrow \infty} C_{gr} = 0.5\sqrt{g/k}. \quad (3.56)$$

Заметим, что для коротких волн и фазовая, и групповая скорости существенно зависят от волнового числа (длины волны), следовательно такие волны являются диспергирующими.

Проиллюстрируем различия в характере распространения диспергирующих и недиспергирующих волн. Будем рассматривать волны, возникающие в результате эволюции некоторого начального возвышения на поверхности воды при нулевом начальном поле скорости течения. Такая постановка задачи является типичной для описания волн цунами сейсмического происхождения. Зададим начальное возвышение Гауссовой формы:

$$\xi_0(x) = e^{-x^2/a^2}, \quad (3.57)$$

где параметр  $a$  характеризует горизонтальный размер возмущения поверхности. В силу линейности рассматриваемой задачи величина амплитуды начального возвышения значения не имеет. Поэтому амплитуда возмущения в формуле (3.57) положена равной единице.

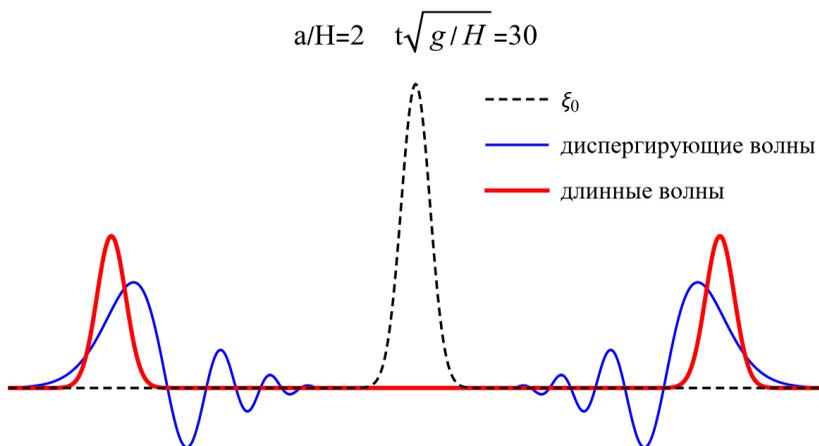
Для расчета эволюции волн представим возмущение свободной поверхности в виде интеграла Фурье:

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk. \quad (3.58)$$

Важно заметить, что циклическая частота в формуле (3.58) является функцией волнового числа. Вид этой функции задается дисперсионным соотношением. Функция  $A(k)$  в (3.58) определяется по форме начального возвышения с использованием обратного преобразования Фурье:

$$\xi_0(x) \equiv \xi(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.59)$$

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0(x) e^{ikx} dx. \quad (3.60)$$



*Рис. 3.3. Волны на поверхности воды, возникающие в результате эволюции начального возвышения Гауссовой формы (черный пунктир). Расчет выполнен по формуле (3.58) с учетом дисперсионных соотношений (3.45) и (3.52) (тонкая и жирная кривые соответственно). Горизонтальный размер начального возвышения и момент времени, для которого выполнен расчет, указаны на рисунке*

Для Гауссового начального возмущения (3.57) интеграл (3.60) вычисляется аналитически:

$$A(k) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} e^{-a^2 k^2 / 4}. \quad (3.61)$$

Расчет волнового возмущения сопряжен с вычислением интеграла (3.58), в котором мы учитываем формулу для величины  $A(k)$  (3.61) и два вида дисперсионных соотношений: для длинных волн (3.52) и для диспергирующих волн (3.45). Интеграл (3.58) рассчитывается численно.

Результаты расчетов представлены на Рис. 3.3. Видно, что при использовании дисперсионного соотношения длинных волн (3.52) начальное возвышение распадается на две одинаковые волны

(жирная кривая), которые бегут со скоростью  $\sqrt{gH}$  в положительной и отрицательном направлении, не меняя своей формы. Использование дисперсионного соотношения (3.45) принципиально меняет картину. Диспергирующая волна (тонкая линия) постоянно трансформируется по мере распространения, а ее амплитуда уменьшается. Уменьшение амплитуды – результат «расплывания» волнового импульса в пространстве. Физическая причина такого «расплывания» – зависимость фазовой скорости от длины волны. При нормальной дисперсии, которая свойственна гравитационным волнам на воде, впереди следуют длинноволновые, а позади – коротковолновые компоненты. Запаздывающие коротковолновые компоненты формируют характерный «диспергирующий хвост».

Определим траектории частиц в линейной потенциальной волне. Для этой цели мы используем полученное выше выражение для потенциала (3.43). Вначале свяжем коэффициент  $A$  в (3.43) с амплитудой смещения свободной поверхности в волне  $\xi_0$ . В соответствии с формулой (2.35) получаем:

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{Ai\omega}{g} e^{i(\omega t - kx)} \equiv \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.62)$$

Из выражения (3.62) вытекает искомая связь:

$$A \equiv -\frac{\xi_0 g}{i\omega}. \quad (3.63)$$

С учетом (3.63) формула для потенциала (3.43) приобретает вид:

$$F(x, z, t) = -\frac{\xi_0 g}{i\omega} \left[ \cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.64)$$

Далее по потенциалу (3.64), рассчитаем компоненты скорости:

$$u(x, z, t) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\xi_0 g k}{\omega} \left[ \cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] e^{i(\omega t - kx)}, \quad (3.65)$$

$$w(x, z, t) = \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\xi_0 g k}{i\omega} \left[ \sinh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \cosh(kz) \right] e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.66)$$

Знание компонент скорости дает возможность рассчитать траектории частиц жидкости. В силу постоянства глубины и

безграничности бассейна в горизонтальном направлении, рассматриваемая задача является однородной по горизонтали. Следовательно, траектории частиц не зависят от горизонтальной координаты. В этой связи для расчета траекторий можно выбрать любое «удобное» значение горизонтальной координаты. Мы выберем значение  $x = 0$ . Интегрируя компоненты скорости по времени, получаем

$$X - X_0 = \int_0^t u(0, z, \hat{t}) d\hat{t} = \xi_0 \left[ \frac{\cosh(kz)}{\tanh(kH)} + \sinh(kz) \right] e^{i(\omega t - \pi/2)} \Big|_0^t, \quad (3.67)$$

$$Z - Z_0 = \int_0^t w(0, z, \hat{t}) d\hat{t} = \xi_0 \left[ \frac{\sinh(kz)}{\tanh(kH)} + \cosh(kz) \right] e^{i(\omega t)} \Big|_0^t. \quad (3.68)$$

Выделим в выражениях (3.67) и (3.68) действительные части

$$X - X_0 = a(z) \sin(\omega t), \quad (3.69)$$

$$Z - Z_0 + b(z) = b(z) \cos(\omega t), \quad (3.70)$$

где  $a(z)$  и  $b(z)$  – амплитуды смещения частиц воды по горизонтали и вертикали, определяемые формулами

$$a(z) = \xi_0 \left[ \frac{\cosh(kz)}{\tanh(kH)} + \sinh(kz) \right] = \xi_0 \frac{\cosh[k(z+H)]}{\sinh[kH]}, \quad (3.71)$$

$$b(z) = \xi_0 \left[ \frac{\sinh(kz)}{\tanh(kH)} + \cosh(kz) \right] = \xi_0 \frac{\sinh[k(z+H)]}{\sinh[kH]}. \quad (3.72)$$

Перед тем как приступить к анализу и интерпретации полученных формул напомним, что мы имеем дело с волнами бесконечно малой амплитуды. Именно поэтому можно говорить о расчете траектории частицы воды в некоторой заданной точке  $(x, z)$ . На самом деле имеется в виду движение частицы в близкой окрестности этой точки. Иными словами, смещение частицы от исходного положения так незначительно, что компоненты скорости, используемые в расчете траектории, можно брать в точке  $(x, z)$ .

Возводя формулы (3.69) и (3.70) в квадрат и складывая их, мы исключаем время и приходим у уравнению траектории движения частиц

$$\left[ \frac{X - X_0}{a(z)} \right]^2 + \left[ \frac{Z - Z_0 + b(z)}{b(z)} \right]^2 = 1. \quad (3.73)$$

Из (3.73) следует, что траекториями движения частиц в потенциальной волне бесконечно малой амплитуды являются эллипсы. Длины полуосей этих эллипсов  $a(z)$ ,  $b(z)$  зависят от вертикальной координаты. По вертикали центр эллипса смещен по отношению к координате  $z$  на бесконечно малую величину  $b(z)$ . На практике этим смещением можно пренебречь.

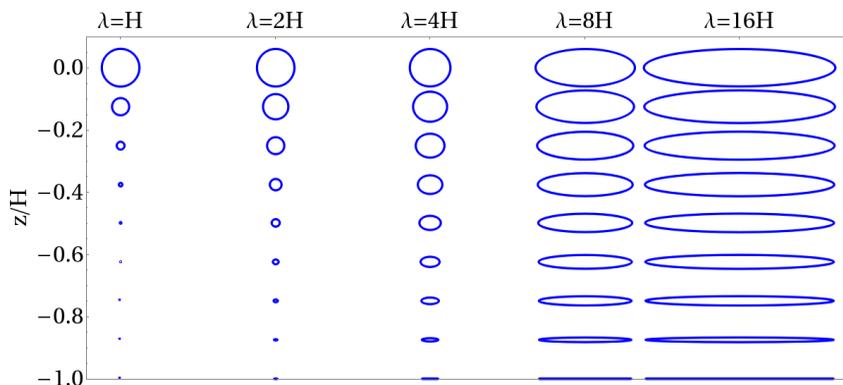


Рис. 3.4. Траектории движения частиц воды в линейной потенциальной волне. Расчет выполнен для набора длин волн (указаны на рисунке)

Траектории движения частиц, рассчитанные при различных отношениях длины волны и глубины океана, представлены на Рис. 3.4. Из рисунка видно, что только достаточно длинные волны приводят в движение весь водный слой. Короткие волны затрагивают только поверхностный слой, – движение проникает в глубину примерно на половину длины волны (см. случай  $\lambda = H$ ). Для коротких волн траектории частиц – окружности. Для длинных – эллипсы, вытянутые в горизонтальном направлении. Из-за условия непротекания на дне океана длина вертикальной полуоси эллипса при приближении к дну всегда стремится к нулю. Кроме того, из рисунка несложно заметить, что при увеличении длины

волны амплитуда горизонтальных движений частиц перестает зависеть от вертикальной координаты. В длинных волнах по горизонтали водный слой движется одинаковым образом.

Полезно рассмотреть два предельных случая: бесконечно глубокий океан и мелкая вода. В случае большой глубины океана величина  $kH \rightarrow \infty$ . Известно, что

$$\lim_{kH \rightarrow \infty} [\tanh(kH)] = 1. \quad (3.74)$$

С учетом (3.74) выражения для амплитуд смещения частиц по горизонтали и вертикали (3.71) и (3.72) преобразуются к простому виду

$$a(z) = b(z) = \xi_0 [\cosh(kz) + \sinh(kz)] = \xi_0 e^{kz}. \quad (3.75)$$

Из (3.75) можно заключить, что при прохождении волны частицы движутся по окружностям, радиусы которых экспоненциально убывают при удалении от свободной поверхности в сторону дна.

Во втором предельном случае, который соответствует мелкой воде, величины  $kH \rightarrow 0$  и  $kz \rightarrow 0$ . Учитывая первые члены разложения гиперболических функций в ряд Тейлора, получаем:

$$\tanh(kH) \approx kH, \quad (3.76)$$

$$\sinh(kH) \approx kH, \quad (3.77)$$

$$\cosh(kz) \approx 1. \quad (3.78)$$

С учетом формул (3.76)-(3.78) выражения (3.71) и (3.72) принимают вид

$$a(z) = \frac{\xi_0}{kH}, \quad (3.79)$$

$$b(z) = \xi_0 \frac{(z+H)}{H}. \quad (3.80)$$

Из (3.79) и (3.80) можно заключить, что на мелкой воде смещения частиц воды по горизонтали не зависят от вертикальной координаты и определяются только амплитудой волны  $\xi_0$  и величиной  $kH$  (отношением длины волны к глубине океана  $kH = 2\pi H / \lambda$ ). Амплитуда смещения частиц воды по вертикали линейно возрастает от 0 на дне до величины  $\xi_0$  на свободной поверхности.

В завершение раздела остановимся на проявлениях поверхностных гравитационных волн в вариациях давления на

дне. Заметим, что в начале 21-го столетия широкое распространение получили глубоководные измерители волн цунами – прецизионные датчики давления, установленные на дне океана. В этой связи вопрос о вариациях придонного давления, вызываемых поверхностными волнами, имеет важное прикладное значение.

Используем форму записи потенциала (3.64), в которую входит амплитуда колебаний свободной поверхности  $\xi_0$ . Из линеаризованного уравнения Бернулли (2.28), в котором мы пренебрегли квадратом скорости, вытекает формула для расчета давления на дне ( $z = -H$ )

$$p_b = \rho g H - \rho \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{z=-H}. \quad (3.81)$$

Давление представляет собой суперпозицию двух компонент: гидростатической ( $\rho g H$ ) и динамической (вариации давления),

$$p = -\rho \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{z=-H}. \quad (3.82)$$

Вариации давления и представляют для нас сейчас главный интерес. Подставляя в формулу (3.82) потенциал (3.64), после элементарных преобразований получаем

$$p = \frac{\xi_0 \rho g}{\cosh(kH)} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.83)$$

Из (3.83) следует, что амплитуда вариаций давления на дне, которые вызываются монохроматической поверхностной волной, определяется следующей формулой:

$$p_0 = \frac{\xi_0 \rho g}{\cosh(kH)}. \quad (3.84)$$

На Рис. 3.5. представлена зависимость величины  $p_0$  от длины волны, рассчитанная в соответствии с формулой (3.84). Из рисунка можно сделать заключение, что амплитуда вариаций давления на дне существенным образом зависит от отношения длины волны к глубине океана. Длинные волны ( $\lambda/H > 10$ ) проявляются в вариациях придонного давления с максимально возможной амплитудой  $\xi_0 \rho g$ . Короткие волны  $\lambda/H < 1$  приводят к практически незаметным колебаниям придонного давления. Даже

в том случае, когда длина волны равна глубине океана, амплитуда вариаций давления будет ослаблена более чем в 100 раз по сравнению с величиной  $\xi_0 \rho g$ .

Характер зависимости (3.84) позволяет сделать вывод о том, что измерение длинных волн по вариациям придонного давления – это весьма удобный способ. Для этого можно указать по меньшей мере две причины. Во-первых, для длинных волн существует однозначная линейная связь вариаций придонного давления и смещения свободной поверхности воды:

$$p(x, y, t) = \rho g \xi(x, y, t). \quad (3.85)$$

Во-вторых, высокочастотный шум, создаваемый короткими поверхностными волнами (например, ветровыми), не проявляется в вариациях придонного давления. Здесь водный слой играет роль естественного фильтра, который не пропускает высокочастотный «шумовой сигнал».

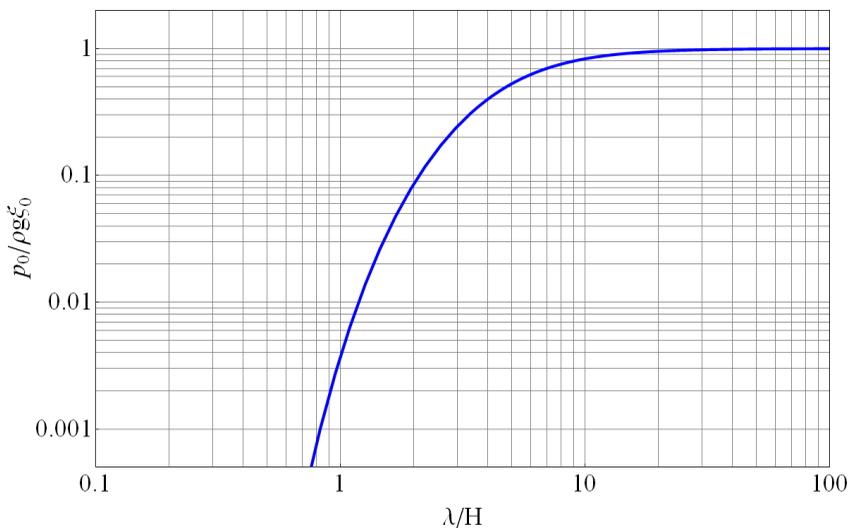


Рис. 3.5. Амплитуда вариаций давления на дне как функция отношения длины волны к глубине

Что касается измерения волн цунами по вариациям придонного давления, то у этого способа есть, конечно, и определенные недостатки. Дело в том, что волны цунами не всегда являются настолько длинными, что формула (3.58) выполняется безусловно.

Глубоководные измерители, особенно те, которые установлены на больших глубинах, заметно занижают амплитуду высокочастотных составляющих. В принципе, возможна корректировка – пересчет вариаций давления в смещения поверхности воды, с использованием преобразования Фурье в сочетании с зависимостью (3.83). Но такой способ нуждается в тонкой настройке, т.к. вместе с полезным высокочастотным сигналом можно усилить и высокочастотный шум, который создан не колебаниями поверхности воды, а иными источниками.

### 3.3. Гидроакустические волны

В разделе 2.4 было получено волновое уравнение (2.60), которое вместе с граничными условиями (2.36) и (2.37) описывает отклик сжимаемой жидкости со свободной поверхностью на динамические деформации дна малой амплитуды. Постановка задачи (2.60), (2.36), (2.37) предполагает, что в слое жидкости могут образовываться как гидроакустические, так и поверхностные гравитационные волны. Возможность существования гидроакустических волн непосредственно следует из волнового уравнения. Существование гравитационных волн обязано граничному условию на свободной поверхности слоя жидкости (2.36), – именно в это выражение входит ускорение силы тяжести. Забегая вперед, заметим, что гидроакустические и поверхностные гравитационные волны, создаваемые сейсмическими движениями дна, существуют в различных и непересекающихся частотных диапазонах (см. раздел 4.4). В этой связи задачи о гравитационных и гидроакустических волнах целесообразно рассматриваться отдельно.

Для выделения «чистых» гидроакустических волн в граничном условии (2.36) следует пренебречь членом, который пропорционален ускорению силы тяжести. Для выявления условий, при которых это возможно, запишем выражение (2.36) в безразмерном виде (безразмерные переменные обозначим символом «\*»)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^{*2}} + \frac{g\lambda}{c_{ac}^2} \frac{\partial F}{\partial z^*} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (3.86)$$

При получении формулы (3.86) в качестве масштаба длин мы использовали длину акустической волны  $\lambda$ , а в качестве масштаба времени – период акустической волны  $\lambda/c_{ac}$ . Заметим, что длина акустических волн, которые могут распространяться в водном слое, ограничена сверху четырьмя глубинами океана:  $\lambda \leq 4H$  (справедливость этого утверждения будет доказана ниже). Учитывая, что максимальная глубина океана  $H_{\max} \approx 11 \text{ км}$ , получаем

$$\frac{g\lambda}{c_{ac}^2} < \frac{4gH_{\max}}{c_{ac}^2} \approx 0.19. \quad (3.87)$$

Из (3.87) следует, что даже для наиболее длинных гидроакустических волн в океане максимальной глубины величина  $g\lambda/c_{ac}^2$  может расцениваться как малая:  $g\lambda/c_{ac}^2 \ll 1$ . Это будет тем более верно для мелководных областей или для более коротких ( $\lambda < 4H$ ) акустических волн.

Малость величины  $g\lambda/c_{ac}^2$  дает основание пренебречь вторым членом в граничном условии на свободной поверхности для задачи о гидроакустических волнах. Отбрасывая в граничном условии (2.36) член, пропорциональный силе тяжести, получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (3.88)$$

Дважды интегрируя выражение (3.88) по времени с учетом нулевого начального поля скорости течения ( $F = 0$ ) и нулевого начального поля давления ( $\partial F/\partial t = 0$ ), получаем новый вариант граничного условия на свободной поверхности

$$F = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (3.89)$$

Граничное условие на дне (2.37) запишем в предположении о неподвижности дна

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H(x, y). \quad (3.90)$$

Для случая бассейна фиксированной глубины, который мы будем рассматривать далее, условие (3.90) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H. \quad (3.91)$$

Само волновое уравнение (2.60) остается неизменным.

Рассмотрим вначале горизонтально однородную систему, в которой акустические волны могут распространяться только в вертикальном направлении. Область ограничена сверху свободной поверхностью, а снизу – неподвижным абсолютно жестким дном. Решение одномерного волнового уравнения с граничными условиями (3.89) и (3.91) (классическая смешанная краевая задача) представимо в виде разложения в ряд Фурье

$$F = \sum_n A^n \sin(k_z^n z), \quad (3.92)$$

$$k_z^n = \frac{\pi(1+2n)}{2H}, \quad (3.93)$$

где  $A^n$  – амплитуда  $n$ -й гармоники,  $k_z^n$  – вертикальное волновое число, соответствующее  $n$ -й гармонике ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Несложно убедиться, что потенциал, представленный суммой (3.92), удовлетворяет граничным условиям (3.89) и (3.91). Вид функций, составляющих ряд (3.92), представлен на Рис. 3.6. Заметим, что гармоники ряда Фурье, которые пропорциональны  $\cos(k_z^n z)$ , заведомо не удовлетворяют граничным условиям (3.89) и (3.91).

В соответствии с формулой (3.93) минимальное волновое число:  $k_z^0 = \pi/2H$ . Максимальная длина гидроакустической волны:  $\lambda_{\max} = 2\pi/k_z^0 = 4H$ . Иными словами на глубине океана укладывается четверть максимальной длины волны. Можно еще сказать и так: водный слой представляет собой четвертьволновой резонатор.

Теперь расширим постановку задачи до трехмерной и рассмотрим плоскую гармоническую волну, распространяющуюся в водном слое

$$F(x, y, z, t) = F_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (3.94)$$

где  $F_0$  – амплитуда,  $\omega$  – циклическая частота,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  – волновой вектор. Подставляя формулу (3.94) в волновое уравнение

(2.60), получаем связь между циклической частотой и компонентами волнового вектора

$$\omega^2 / c_{ac}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (3.95)$$

Учитывая, что вертикальная компонента волнового вектора может иметь только определенный набор значений, предписываемый формулой (3.93), из (3.95) получаем

$$k_h = \sqrt{\omega^2 / c_{ac}^2 - (k_z^n)^2}, \quad (3.96)$$

где  $k_h^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$  – квадрат горизонтального волнового вектора.

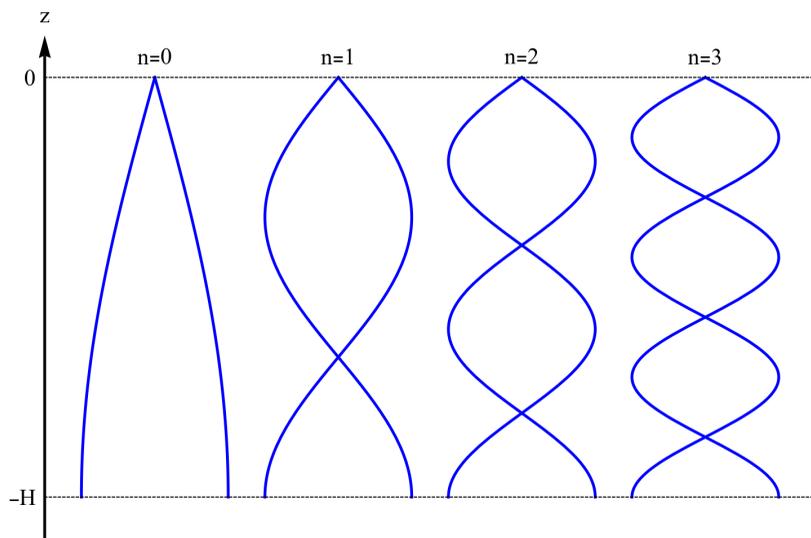


Рис. 3.6. Вид функций (первые 4 моды), по которым может быть разложен потенциал скорости течения в сжимаемом водном слое, ограниченном свободной поверхностью сверху и абсолютно жестким дном снизу

Из формулы (3.96) видно, что при малых частотах  $\omega$  возможны ситуации, когда выражение под корнем становится отрицательным. При этом горизонтальное волновое число принимает мнимое значение. Мнимость горизонтального волнового числа означает, что в горизонтальном направлении

возмущения не распространяются в виде гидроакустических волн, а экспоненциально быстро затухают.

Подставляя в (3.96) минимальное вертикальное волновое число ( $k_z^0 = \pi/2H$ ), находим критическую частоту (или частоту отсечки), которая ограничивает частотный диапазон существования гидроакустических волн снизу:

$$\omega_c = \pi c_{ac} / 2H . \quad (3.97)$$

Если акустический сигнал, создаваемый неким источником, имеет частоту ниже, чем частота отсечки, то такой сигнал не может распространяться в водном слое как гидроакустическая волна, он будет экспоненциально быстро затухать по мере удаления от источника.

Полезно выписать формулу и для критического периода акустических волн (периода отсечки)

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{4H}{c_{ac}} . \quad (3.98)$$

Период отсечки следует интерпретировать как максимально возможный период гидроакустических волн.

Поведение акустических волн в водном слое, который ограничен абсолютно жестким дном и свободной поверхностью, представляет собой один из примеров волноводного распространения звука. Волноводам свойственно существование частоты отсечки и соответствующих ей максимально возможных значений периода и длины волны. Несмотря на то, что сама скорость  $c_{ac}$  в рассматриваемой модели не зависит от длины волны, распространение гидроакустических волн в волноводе подвержено дисперсии. Дисперсионным соотношением является выражение (3.96), которое мы запишем в следующем виде:

$$\omega = c_{ac} \sqrt{k_h^2 + (k_z^n)^2} . \quad (3.99)$$

Знание дисперсионного соотношения позволяет выписать явные формулы для фазовой  $C_{ph}$  и групповой  $C_{gr}$  скоростей распространения волн в волноводе (т.е. в горизонтальном направлении)

$$C_{ph} \equiv \frac{\omega}{k_h} = c_{ac} \sqrt{1 + (k_z^n / k_h)^2} , \quad (3.100)$$

$$C_{gr} \equiv \frac{d\omega}{dk_h} = \frac{c_{ac}}{\sqrt{1 + \left(k_z^n / k_h\right)^2}}. \quad (3.101)$$

Зависимости фазовой и групповой скорости от горизонтального волнового числа и номера моды, рассчитанные в соответствии с формулами (3.100) и (3.101), представлены на Рис. 3.7. Видно, что групповая скорость, с которой происходит перенос энергии акустических волн в волноводе, обладает скоростями, которые всегда меньше, чем величина  $c_{ac}$ . Несколько парадоксальным кажется результат для фазовых скоростей, — они всегда превосходят скорость акустических волн  $c_{ac}$ .

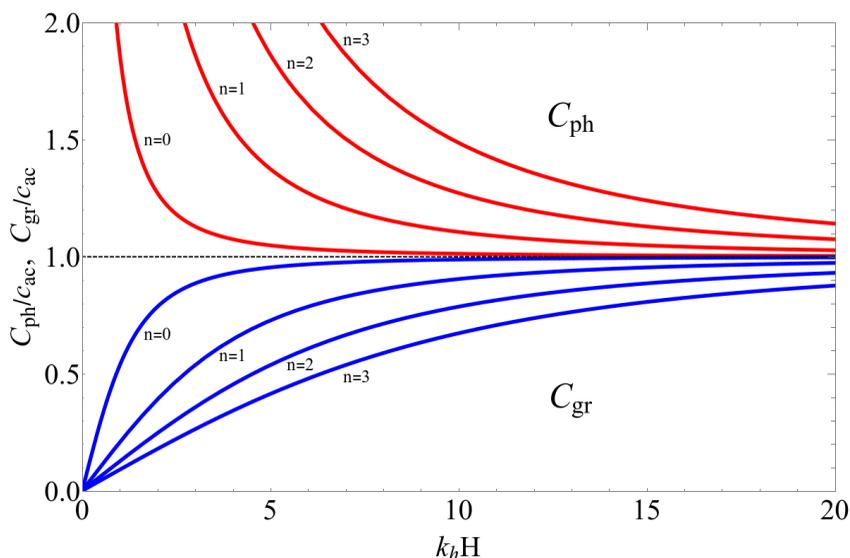


Рис. 3.7. Фазовая (верхние кривые) и групповая (нижние кривые) скорости гидроакустических волн, рассчитанные для первых 4 мод, как функция горизонтального волнового числа

Примечательно, что формулы для фазовой (3.100) и групповой (3.101) скоростей допускают простую геометрическую интерпретацию. Запишем две цепочки элементарных преобразований

$$C_{ph} = c_{ac} \sqrt{1 + \left(k_z^n / k_h\right)^2} = c_{ac} \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \theta)^2} = \frac{c_{ac}}{\cos \theta}, \quad (3.102)$$

$$C_{gr} = \frac{c_{ac}}{\sqrt{1 + \left(k_z^n / k_h\right)^2}} = \frac{c_{ac}}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \theta)^2}} = c_{ac} \cos \theta, \quad (3.103)$$

где  $\theta$  – угол наклона волнового луча к горизонту.

Геометрия рассматриваемой системы показана на Рис. 3.8. Луч акустической волны многократно отражается от свободной поверхности и дна. Поэтому перенос энергии вдоль волновода (в горизонтальном направлении) очевидно происходит со скоростью, которая меньше скорости звука  $c_{ac} \cos \theta < c_{ac}$  (именно такая скорость следует из формулы (3.103)).

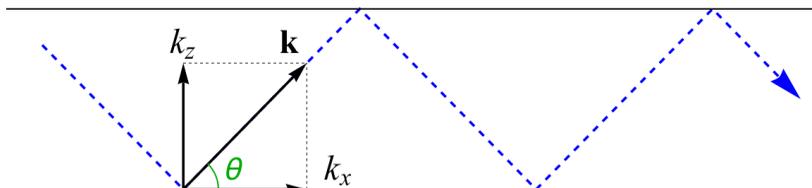


Рис. 3.8. Ход акустического волнового луча (ломанная пунктирная линия со стрелкой) в волноводе, образованном свободной поверхностью и абсолютно жестким дном

Что касается парадоксального результата о том, что фазовая скорость в волноводе превышает скорость звука, то на самом деле в этом нет ничего удивительного. Если рассуждать формально, то акустическая волна пройдет расстояние  $L$  вдоль волновода за время  $\tau = L / c_{ac}$ . Но реальный луч из-за многократных отражений от свободной поверхности и дна проходит существенно больший путь, чем длина волновода:  $L / \cos \theta$ . Следовательно, для того, чтобы пройти расстояние  $L / \cos \theta$  за время  $\tau$ , фаза должна двигаться вдоль луча быстрее скорости звука, а именно со скоростью  $c_{ac} / \cos \theta$ , что соответствует формуле (3.102).

## Глава 4 ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН

Глава посвящена задачам о возбуждении волн цунами, которые рассматриваются в рамках теории длинных волн и потенциальной теории. Главным образом на основе аналитических решений анализируются основные закономерности формирования волн динамическими деформациями океанического дна. В рамках линейной теории длинных волн рассмотрена задача о генерации волн подвижными неоднородностями атмосферного давления.

### 4.1. Одномерные задачи теории длинных волн

В разделе 2.2 в рамках линейной теории длинных волн было получено неоднородное волновое уравнение (2.23), которое описывает возмущения слоя жидкости, создаваемые динамическими деформациями дна и/или подвижными неоднородностями атмосферного давления в бассейне переменной глубины. В общем случае решение уравнения (2.23) возможно численными методами. Но здесь нас главным образом будут интересовать результаты, которые следуют из точных аналитических решений. Поэтому в дальнейшем, для обеспечения возможности получения аналитических решений, мы будем рассматривать бассейн фиксированной глубины  $H$ . Кроме того, на первом этапе для наглядности и простоты мы ограничимся одномерной постановкой задачи (вдоль оси  $0x$ ). С учетом означенных предположений волновое уравнение (2.23) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial^2 p_{atm}}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) следует дополнить начальными условиями:

$$t = 0: \quad \xi = \xi_0(x), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0. \quad (4.2)$$

Первое из условий (4.2) физически означает, что в начальный момент времени  $t=0$  на поверхности воды существует некоторое отклонение водной поверхности от равновесного положения  $\xi_0$ , которое обычно именуется «начальное возвышение». Физический смысл второго условия ( $\partial \xi / \partial t = 0$ ) – задание нулевого поля скорости течения в начальный момент времени – не является столь очевидным. Покажем, что условия  $\partial \xi / \partial t = 0$  и  $u = 0$  эквивалентны. Для этого мы воспользуемся уравнением неразрывности (2.18). В начальный момент времени движения дна отсутствуют, т.е.  $\partial \eta / \partial t = 0$ . При  $\partial \xi / \partial t = 0$  и  $H = const$  из уравнения неразрывности формально следует:  $\partial u / \partial x = 0$  или  $u = const$ . Это означает, что условие  $\partial \xi / \partial t = 0$  не противоречит возможности существования в начальный момент времени постоянного однородного течения. Но в силу того, что мы имеем дело с линейной теорией, скорость этого однородного течения является заведомо малой величиной:  $u \ll \sqrt{gH}$ . Единственно возможным в такой ситуации физическим эффектом – эффектом Доплера – можно пренебречь и просто полагать  $u = 0$ . Отсюда следует эквивалентность условий  $u = 0$  и  $\partial \xi / \partial t = 0$ .

Общее решение одномерного неоднородного волнового уравнения (4.1) с начальными условиями (4.2) хорошо известно в математической физике [Полянин, 2001]:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2} [\xi_0(x - c \cdot t) + \xi_0(x + c \cdot t)] + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\hat{t})}^{x+c(t-\hat{t})} d\hat{x} \Phi(\hat{x}, \hat{t}), \quad (4.3)$$

$$\Phi = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial^2 p_{atm}}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

где  $c = \sqrt{gH}$  – скорость длинных волн.

Из решения (4.3) видно, что при отсутствии динамических деформаций дна и возмущений атмосферного давления (при  $\Phi = 0$ ) начальное возвышение  $\xi_0$  порождает две волны, которые имеют форму начального возвышения и бегут в положительном и

отрицательном направлениях оси  $Ox$  со скоростью  $c$ , сохраняя свою форму. Амплитуда этих волн равна половине амплитуды начального возвышения. Этот широко известный результат математической физики имеет прямое отношение к задаче о генерации волн цунами. При численном воспроизведении динамики реальных волн цунами почти никогда возмущение не вводится в модель как движение дна океана. В силу скоротечности процесса деформации дна при землетрясении предполагается, что в начальный момент времени на поверхности воды уже существует возмущение, равное остаточной (косейсмической) деформации поверхности дна. Задача о начальном возвышении будет подробно рассмотрена в следующей главе в разделе 5.1.

Далее мы остановимся на процессе генерации волн динамическими деформациями дна. Будем полагать, что начальное возмущение и начальное поле скорости отсутствуют ( $t=0: \xi=0, \partial\xi/\partial t=0$ ). Кроме того, здесь мы пренебрежем воздействием неоднородностей атмосферного давления ( $p_{atm}=const$ ). В этом случае решение задачи (4.3) дается следующей формулой:

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t d\hat{t} \int_{x-c(t-\hat{t})}^{x+c(t-\hat{t})} d\hat{x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \hat{t}^2}. \quad (4.5)$$

Для анализа особенностей генерации волн выберем модельный закон деформации дна с разделенными пространственной и временной частями

$$\eta(x,t) = X(x) \cdot T_i(t), \quad (4.6)$$

$$X(x) = \eta_0 [\theta(x+a) - \theta(x-a)], \quad (4.7)$$

$$T_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/\tau, & 0 < t \leq \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (4.8)$$

$$T_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2t/\tau, & 0 < t \leq \tau/2, \\ 1 - 2(t - \tau/2)/\tau, & \tau/2 < t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases} \quad (4.9)$$

где  $\theta$  – ступенчатая функция Хевисайда,  $\eta_0$  – амплитуда деформации дна,  $a$  – полуширина области деформации,  $\tau$  – продолжительность деформации.

Пространственно-временной закон деформации дна, определяемый формулами (4.7)-(4.9), представлен на Рис. 4.1. Деформация дна имеет форму прямоугольника. Временные зависимости соответствуют подвижкам дна с остаточным смещением (4.8) и без остаточного смещения (4.9). В дальнейшем для краткости будем именовать эти законы «поршневая» и «мембранная» подвижки соответственно.

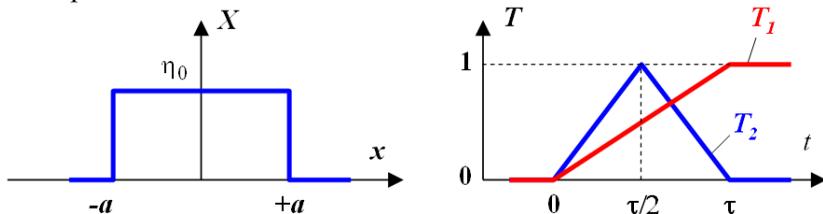
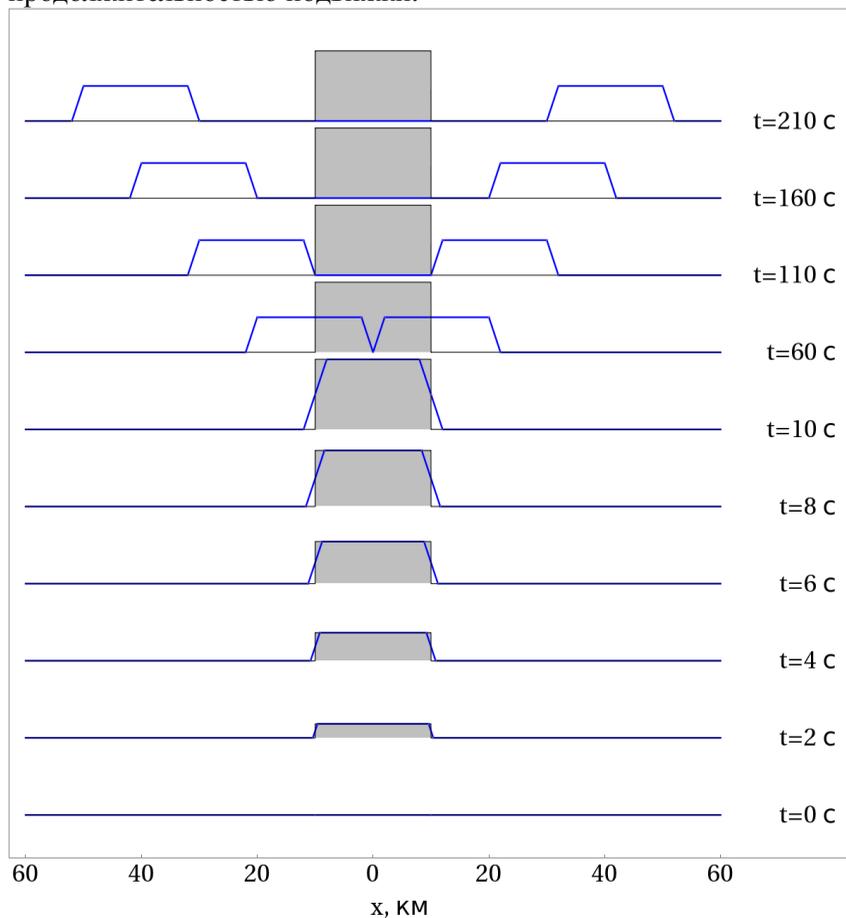


Рис. 4.1. Модельный закон деформации дна. Слева показана зависимость деформации от координаты, справа – от времени ( $T_1$  – поршневая подвижка,  $T_2$  – мембранная подвижка)

На Рис. 4.2 представлен процесс формирования волн поршневой подвижкой. Расчет выполнен по формуле (4.5) при параметрах, которые свойственны реальным очагам цунами: горизонтальная протяженность источника  $2a = 20$  км, продолжительность деформации дна  $\tau = 10$  с и скорость длинных волн  $c = 200$  м/с (соответствует глубине океана около 4 км). Из рисунка видно, что в процессе поднятия дна водный слой в области источника повторяет движение дна. При этом амплитуда возмущения на поверхности воды в точности соответствует амплитуде деформации дна. Формы возмущений поверхности воды и дна близки друг к другу, отличия наблюдаются только вблизи границ источника. Связано это с тем, что за время деформации дна волна успевает пройти незначительное (по сравнению с размером источника) расстояние  $\tau \cdot c = 2$  км  $\ll 2a$ . После завершения подвижки, в момент времени  $t = a/c + \tau = 60$  с формирование волн заканчивается. В итоге возникают две волны, имеющие форму

трапеции, которые распространяются в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$ . Амплитуда волн равна половине амплитуды деформации дна. Длина волн составляет  $2a + c \cdot \tau$ , она определяется размером источника и продолжительностью подвижки.



*Рис. 4.2. Возмущение поверхности воды, вызванное деформацией дна с остаточным смещением (поршиновой подвижкой). Расчет выполнен по формуле (4.5) для фиксированных моментов времени (указаны на рисунке) при  $a = 10$  км,  $c = 200$  м/с,  $\tau = 10$  с. Деформация дна показана серым прямоугольником*

В силу линейности рассматриваемой задачи полярность возмущения на поверхности воды определяется полярностью деформации дна. Опускание дна привело бы к возникновению волн отрицательной полярности, но все прочие характеристики волновых возмущений остались бы без изменений.

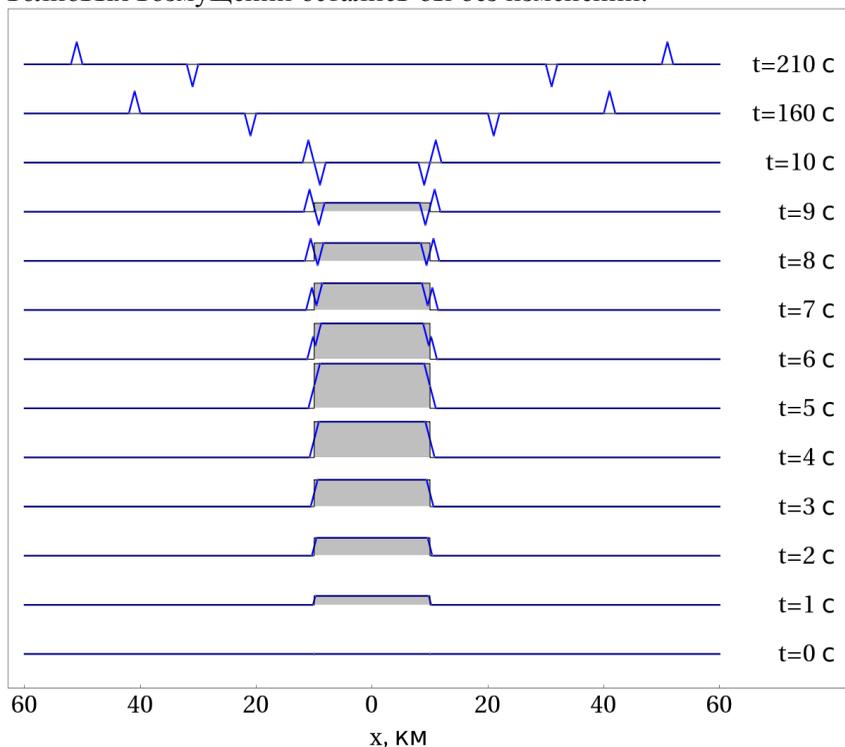


Рис. 4.3. Возмущение поверхности воды, вызванное деформацией дна без остаточного смещения (мембранной подвижкой). Расчет выполнен по формуле (4.5) для фиксированных моментов времени (указаны на рисунке) при  $a = 10$  км,  $c = 200$  м/с,  $\tau = 10$  с. Деформация дна показана серым прямоугольником

Формирование волн подвижкой дна без остаточного смещения представлено на Рис. 4.3. Видно, что и в этом случае во время деформации смещение свободной поверхности повторяет движение дна (поднятие и последующее опускание) везде, кроме областей вблизи границ источника. Волновое возмущение,

сформировавшееся в итоге на поверхности воды, состоит из двух пар разнополярных импульсов треугольной формы, которые бегут в положительном и отрицательном направлениях оси  $0x$ . Причем впереди всегда следует импульс, полярность которого совпадает с полярностью подвижки (положительный), а вторым следует импульс противоположной полярности. Амплитуда всех импульсов одинакова, и она в точности соответствует половине амплитуды деформации дна. Длина импульсов не зависит от размера источника, она определяется только продолжительностью деформации дна  $c \cdot \tau$ .

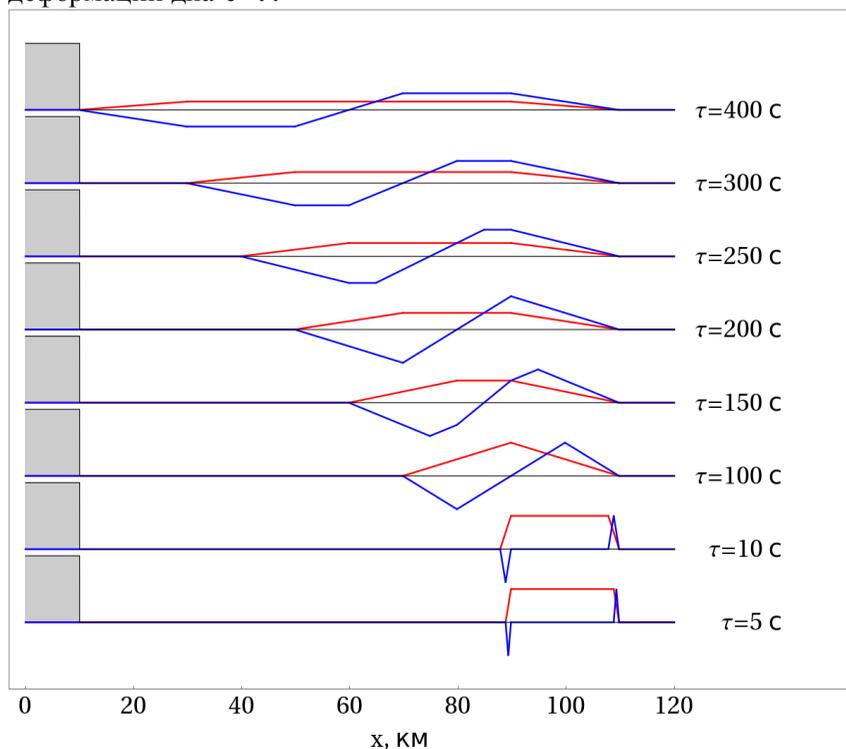


Рис. 4.4. Возмущения поверхности воды, вызванные поршневой и мембранной подвижками различной продолжительности (указаны на рисунке). Расчет выполнен по формуле (4.5) для момента времени  $t = 500$  c при  $a = 10$  км,  $c = 200$  м/с. Остаточная деформация дна показана серым прямоугольником

Одним из параметров, влияющих на характеристики формируемых волн, является продолжительность подвижки  $\tau$ . На Рис. 4.4 показаны волны, сформированные поршневой и мембранной подвижками различной продолжительности. Расчет выполнен при  $t = 500 \text{ с}$ ,  $a = 10 \text{ км}$ ,  $c = 200 \text{ м/с}$ . На рисунке представлена область  $x \geq 0$ , в которой локализованы волны, бегущие только в положительном направлении оси  $0x$ . Из рисунка видно, что при коротких подвижках амплитуда волновых возмущений не зависит от продолжительности. При длительных подвижках амплитуда начинает заметно убывать с ростом продолжительности. Форма волновых возмущений также претерпевает изменения по мере роста продолжительности подвижки. Но при любой продолжительности поршневая подвижка формирует однополярную волну, а мембранная – биполярную.

Вообще говоря, свойства волновых возмущений зависят не только от продолжительности подвижки. Напомним, что входными параметрами задачи являются следующие пять величин:  $\eta_0$ ,  $a$ ,  $\tau$ ,  $H$  и  $g$ . Для сокращения числа входных параметров перейдем в уравнении (4.1) к безразмерным переменным. В качестве масштаба смещения поверхности воды и дна выберем амплитуду деформации дна  $\eta_0$ , в качестве масштаба длин – полуширину источника  $a$ , а в качестве масштаба времени – время распространения длинной волны на расстояние, равное масштабу длин:  $a/\sqrt{gH}$ . В безразмерных переменных ( $\xi^* = \xi/\eta_0$ ,  $\eta^* = \eta/\eta_0$ ,  $x^* = x/a$ ,  $t^* = t\sqrt{gH}/a$ ) уравнение (4.1), которое записано при

$P_{atm} = const$ , приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \xi^*}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^{*2}}. \quad (4.10)$$

Аналитическое решение уравнения (4.10) при начальных условиях  $\xi^* = 0$ ,  $\partial \xi^*/\partial t^* = 0$  может быть получено формально из (4.5) при  $c = 1$  (все переменные при этом следует полагать безразмерными).

Уравнение (4.10) не содержит никаких безразмерных коэффициентов. В этой связи вид решения определяется исключительно свойствами источника. Пространственная форма

источника (4.7) фиксирована (прямоугольник). Параметр, определяющий горизонтальную протяженность источника ( $a$ ), в результате перехода к безразмерным переменным выпадает из рассмотрения. Временные законы движения дна (4.8) и (4.9) также фиксированы (поршневая и мембранная подвижки), но они характеризуются безразмерной продолжительностью процесса деформации дна  $\tau^* = \tau\sqrt{gH}/a$ . Таким образом, из пяти перечисленных выше входных параметров задачи у нас остался единственный безразмерный параметр  $\tau^*$ , от которого зависят форма и амплитуда волн.

Обладая аналитическим решением задачи (4.10), несложно рассчитать зависимость амплитуды и энергии волн от безразмерной продолжительности подвижки  $\tau^*$ . Под амплитудой будем понимать высоту гребня сформировавшейся волны, вызванной подвижкой положительной полярности ( $\eta_0 > 0$ )

$$A = \max(\xi). \quad (4.11)$$

Амплитуду волн целесообразно нормировать на величину  $\eta_0$ . Как было показано в разделе 3.1, потенциальная и кинетическая энергии бегущей линейной волны равны. Поэтому в качестве энергии волн будем рассматривать удвоенную потенциальную энергию бегущих сформировавшихся волн

$$E = \rho g \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 dx. \quad (4.12)$$

Величины  $A$  и  $E$  для поршневой и мембранной подвижек могут быть рассчитаны аналитически [Носов, Шелковников, 1997]. Соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$A_{\text{поршн.}} = \eta_0 \begin{cases} \frac{1}{2}, & \tau^* \leq 2, \\ \frac{1}{\tau^*}, & \tau^* > 2, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$A_{\text{мембр.}} = \eta_0 \begin{cases} \frac{1}{2}, & \tau^* \leq 4, \\ \frac{2}{\tau^*}, & \tau^* > 4, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$E_{\text{поршн.}} = E_0 \begin{cases} 1 - \frac{\tau^*}{6}, & \tau^* \leq 2, \\ \frac{2}{\tau^*} - \frac{4}{3\tau^{*2}}, & \tau^* > 2, \end{cases} \quad (4.15)$$

$$E_{\text{мембр.}} = E_0 \begin{cases} \frac{\tau^*}{3}, & \tau^* \leq 2, \\ \frac{\tau^*}{3} - \frac{4}{3} \left( \left( \frac{\tau^*}{2} \right)^{1/3} - \left( \frac{\tau^*}{2} \right)^{-2/3} \right)^3, & 2 < \tau^* \leq 4, \\ \frac{8}{\tau^*} \left( 1 - \frac{2}{\tau^*} \right), & \tau^* > 4, \end{cases} \quad (4.16)$$

где  $E_0 = \rho g \eta_0^2$  – потенциальная энергия начального возвышения, эквивалентного по форме деформации дна с остаточным смещением (4.7).

Зависимости (4.13)-(4.16) представлены на Рис. 4.5. Из рисунка видно, что при увеличении продолжительности подвижки  $\tau$  амплитуда волн остается неизменной ( $A/\eta_0 = 0.5$ ) вплоть до значений  $\tau = 2a/\sqrt{gH}$  для поршневой подвижки и  $\tau = 4a/\sqrt{gH}$  для мембранной. При дальнейшем увеличении продолжительности амплитуда уменьшается по закону  $A \sim \tau^{-1}$ . Энергия волн, формируемых поршневой подвижкой, достигает максимального значения  $E_0$  при мгновенной деформации дна. При увеличении продолжительности энергия монотонно убывает. Медленное убывание энергии, наблюдаемое в диапазоне  $\tau < 2a/\sqrt{gH}$ , сменяется относительно быстрым ее падением, близким к закону  $E \sim \tau^{-1}$ , в диапазоне  $\tau > 4a/\sqrt{gH}$ .

Энергия волн, образуемых мембранной подвижкой, немонотонно зависит от продолжительности  $\tau$ . При  $\tau < 4a/\sqrt{gH}$  энергия растет, причем вплоть до  $\tau = 2a/\sqrt{gH}$  рост происходит по закону близкому к  $E \sim \tau$ . При  $\tau = 4a/\sqrt{gH}$  энергия достигает максимума, после чего начинает убывать по закону, близкому к  $E \sim \tau^{-1}$ .

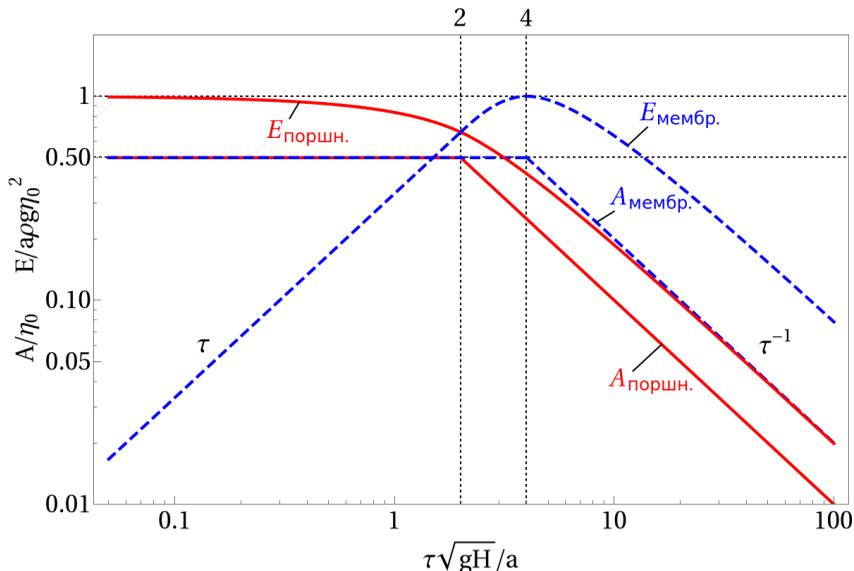


Рис. 4.5. Амплитуда и энергия волн, возбуждаемых поршневой и мембранной подвижками, в зависимости от продолжительности деформации дна

Важно заметить, что и для поршневой и для мембранной подвижки энергия волн не может превышать величину потенциальной энергии начального возвышения, эквивалентного по форме деформации дна с остаточным смещением ( $E_0$ ).

Для реальных источников цунами величина  $\tau^*$  обычно является малой. Типичное значение этой величины  $\tau^* \sim 10^{-2} - 10^{-1}$  ( $a \sim 10^4 - 10^5$  м,  $\tau \sim 10$  с,  $H \sim 10^3$  м). Т.е. продолжительность деформации дна существенно уступает времени распространения длинной волны на расстояние, равное размеру источника. Если

обратиться к зависимостям энергии волн от продолжительности подвижки, которые представлены на Рис. 4.5, то можно заключить, что при  $\tau^* \sim 10^{-2} - 10^{-1}$  подвижка дна с остаточным смещением (поршневая) формирует волны цунами, обладающие значительной энергией. В то время как подвижка без остаточного смещения (мембранная) не способна эффективно возбуждать волны цунами. Теоретически мембранная подвижка превосходит по эффективности поршневую при  $\tau^* > 2$ . Но столь значительная продолжительность процесса деформации дна не является типичной.

Далее исследуем некоторые закономерности возбуждения длинных волн бегущими возмущениями. В качестве бегущих возмущений будем рассматривать деформации дна и неоднородности атмосферного давления, которые распространяются по горизонтали с заданной скоростью  $U$ . Для определенности будем полагать, что возмущения бегут в положительном направлении оси  $0x$ . Такие возмущения описываются формулами

$$\eta(x, t) = b(x - Ut), \quad (4.17)$$

$$p_{atm}(x, t) = p(x - Ut), \quad (4.18)$$

где  $b$  и  $p$  – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Вначале остановимся на генерации волн бегущими деформациями дна. Из уравнения (4.1) при  $p_{atm} = const$  получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (4.19)$$

В природе бегущим подвижкам могут соответствовать распространяющиеся по дну поверхностные сейсмические волны илидвигающееся оползневое тело. Будем полагать, что движение является установившимся. В этом случае над бегущей подвижкой должно сформироваться вынужденное возмущение поверхности воды, форма которого описывается функцией  $b$ :

$$\xi(x, t) = C_b b(x - Ut), \quad (4.20)$$

где  $C_b$  – безразмерная константа, характеризующая амплитуду возмущения поверхности воды. Подставляя в уравнение (4.19) формулы (4.17) и (4.20), получаем

$$C_b = \frac{Fr}{Fr - 1}, \quad (4.21)$$

где  $Fr = U^2 / gH$  – число Фруда.

Зависимость (4.21) представлена на Рис. 4.6 сплошной линией. Видно, что при  $Fr = 0$  величина  $C_b = 0$ , т.е. неподвижное возмущение не вызывает волн. При  $0 < Fr < 1$ , т.е. когда скорость подвижки  $U$  меньше скорости длинных волн, полярность возмущения на поверхности воды не совпадает с полярностью бегущей подвижки дна ( $C_b < 0$ ). В диапазоне  $Fr > 1$  возмущения дна и поверхности воды имеют одинаковую полярность ( $C_b > 0$ ). Причем для быстро бегущих подвижек, таких например, как поверхностные сейсмические волны ( $Fr \gg 1, C_b \rightarrow 1$ ) форма возмущения свободной поверхности воды практически повторяет форму бегущего возмущения дна.

Особый интерес всегда вызывал случай резонанса (резонанс Праудмена): при  $Fr \approx 1$  амплитуда смещения поверхности воды резко возрастает. Но в природе реализация резонансной накачки энергии от бегущей подвижки к возмущению на поверхности воды маловероятна. Для подводных оползней число Фруда, как правило, заметно меньше единицы, а для сейсмических волн наоборот – существенно больше единицы. Кроме того, следует заметить, что формула (4.21) получена в рамках линейной теории, которая не описывает возмущения поверхности воды большой амплитуды. При рассмотрении полной нелинейной задачи рост амплитуды будет ограничен при любом значении числа Фруда.

Теперь перейдем к закономерностям формирования волн бегущими неоднородностями атмосферного давления. Запишем уравнение (4.1), пренебрегая деформациями дна

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial^2 p_{atm}}{\partial x^2}. \quad (4.22)$$

Как и в случае бегущей подвижки дна, решение уравнения (4.22) будем искать в виде бегущего возмущения

$$\xi(x, t) = C_p p(x - Ut), \quad (4.23)$$

где  $C_p$  – размерный коэффициент, характеризующий амплитуду возмущения поверхности воды. Подставляя (4.18) и (4.23) в уравнение (4.22), получаем

$$C_p = \frac{1}{\rho g (Fr - 1)}. \quad (4.24)$$

Зависимость (4.24) представлена на Рис. 4.6 пунктирной линией. Из рисунка видно, что при нулевой скорости движения атмосферного возмущения коэффициент, ответственный за амплитуду принимает конечное отрицательное значение  $C_p = -1/\rho g$ . Физически это означает, что в той области, где присутствует неподвижное локальное повышение атмосферного давления  $\Delta p$ , будет наблюдаться статическое понижение уровня моря на величину

$$\Delta \xi = -\Delta p / \rho g. \quad (4.25)$$

Формула (4.25) именуется «закон обратного барометра».

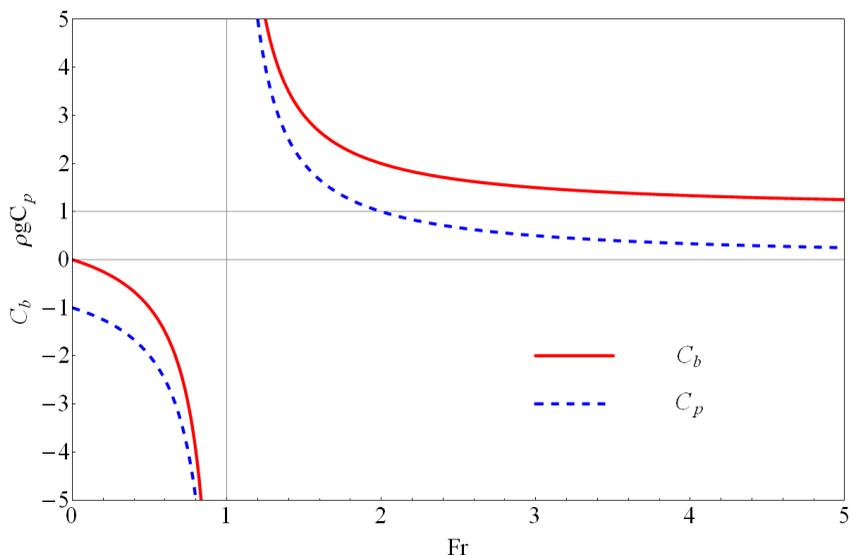


Рис.4.6. Амплитуда поверхностных волн, вызываемых в водном слое бегущими возмущениями:  $C_b$  – бегущей подвижкой дна,  $C_p$  – бегущей неоднородностью атмосферного давления

Подвижная неоднородность атмосферного давления способна создавать на поверхности воды возмущения большей амплитуды, чем это предписывает закон обратного барометра. Причем при  $Fr \approx 1$  возможна чрезвычайно эффективная передача энергии от атмосферы к водному слою (резонанс Праудмена). С этим эффектом связывают генерацию метеоцунами. На шельфе скорость длинных волн составляет 10-30 м/с, что в ряде случаев оказывается близким к скорости распространения атмосферных возмущений.

В диапазоне  $Fr > 1$  величина  $C_p > 0$ , т.е. полярности возмущения давления и смещения поверхности воды совпадают. В этом случае область с локально повышенным давлением будет вызывать повышение уровня моря. При очень высоких скоростях распространения атмосферного возмущения реакция водного слоя будет незначительной (при  $Fr \gg 1$ ,  $C_p \rightarrow 0$ ). В качестве прототипа высокоскоростного атмосферного возмущения может выступать ударная волна от мощного взрыва в атмосфере (например, взрыв вулкана или метеорита).

## 4.2. Двумерные задачи теории длинных волн

Пространственная (в горизонтальной плоскости) постановка задачи позволяет сосредоточиться на двух важных особенностях динамики волн цунами: законе затухания волн при удалении от источника и связи направленности излучения волн с геометрическими свойствами очага. Сразу заметим, что выявленные в одномерном случае закономерности генерации волн динамическими деформациями дна остаются в силе. Поэтому мы не будем повторять исследование зависимости амплитуды и энергии волн от продолжительности деформации дна для двумерного случая. Тем более, что для реальных цунами продолжительность подвижки является столь короткой по сравнению со временем распространения волны на расстояние, равное размеру источника, что она слабо влияет на параметры формируемых волн.

Будем рассматривать безграничный по горизонтали (на плоскости  $Oxy$ ) бассейн фиксированной глубины  $H$ . Это обеспечит возможность использования простых аналитических решений. Волновое уравнение (2.23) запишем для случая  $H = const$ ,  $\eta = 0$ ,  $p_{atm} = const$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (4.26)$$

Уравнение (4.26) дополним начальными условиями:

$$t = 0: \quad \xi = \xi_0(x, y), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0. \quad (4.27)$$

Аналитическое решение задачи (4.26), (4.27) дается формулой Пуассона [Полянин, 2001]

$$\xi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \frac{\xi_0(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}}{\sqrt{c^2 t^2 - (\hat{x} - x)^2 - (\hat{y} - y)^2}}, \quad (4.28)$$

где  $\Omega$  – круговая область радиуса  $ct$  с центром в точке  $(x, y)$ .

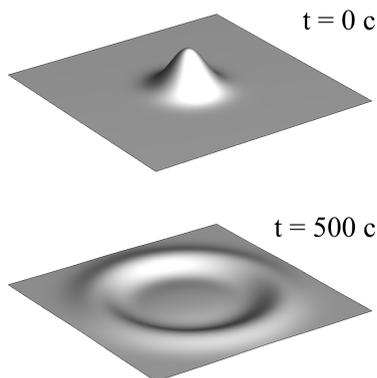
Пусть начальное возвышение в источнике имеет форму Гауссова колокола:

$$\xi_0(x, y) = \eta_0 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad (4.29)$$

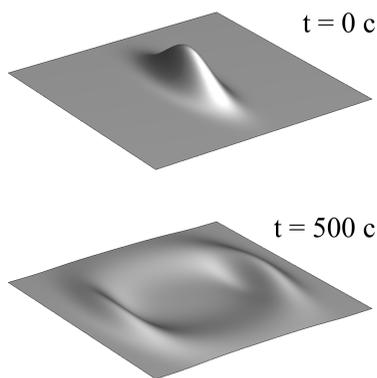
где  $\eta_0$  – амплитуда возмущения,  $a$  и  $b$  – параметры, характеризующие протяженность источника в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. В плане источник, описываемый формулой (4.29), имеет форму эллипса. Параметры  $a$  и  $b$  можно интерпретировать как длины полуосей этого эллипса. Далее мы рассмотрим два примера: симметричный ( $a = b$ ) и асимметричный ( $a \neq b$ ) источники.

На Рис. 4.7 представлены форма начального возвышения (при  $t = 0$  с), соответствующая симметричному источнику, типа (4.29) (вверху), и кольцевая волна, сформировавшаяся в результате эволюции этого начального возвышения к моменту времени  $t = 500$  с (внизу). Расчет выполнен по формуле (4.28) при следующих значениях параметров:  $a = b = 30$  км,  $H = 4$  км и

$g = 9.8 \text{ м/с}^2$ . На ровном дне симметричный источник, разумеется, создает симметричную кольцевую волну.



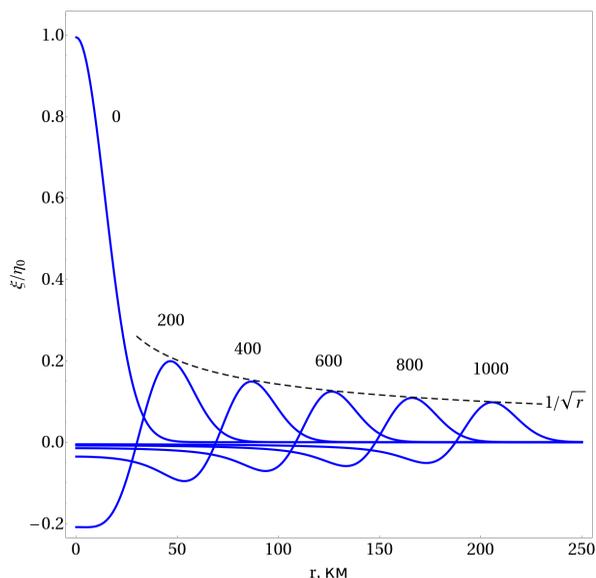
*Рис. 4.7. Симметричное начальное возмущение водной поверхности Гауссовой формы (вверху) и кольцевая волна, сформированная в результате эволюции этого возмущения к моменту времени 500 с (внизу). Расчет выполнен по формуле (4.28) при  $a = 30 \text{ км}$ ,  $b = 30 \text{ км}$ ,  $H = 4 \text{ км}$  и  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$*



*Рис. 4.8. Асимметричное начальное возмущение водной поверхности Гауссовой формы (вверху) и волна, сформированная в результате эволюции этого возмущения к моменту времени 500 с (внизу). Расчет выполнен по формуле (4.28) при  $a = 20 \text{ км}$ ,  $b = 60 \text{ км}$ ,  $H = 4 \text{ км}$  и  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$*

Волна, формируемая асимметричным (вытянутым:  $a \neq b$ ) источником, представлена на Рис. 4.8. Параметры расчета были следующие:  $a = 20 \text{ км}$ ,  $b = 60 \text{ км}$ ,  $H = 4 \text{ км}$  и  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ . Видно, что асимметричный источник формирует асимметричную волну, амплитуда и длина которой зависят от направления распространения волны (азимутального угла). Причем амплитуда волны максимальна в направлении, перпендикулярном наиболее протяженной оси источника. Длина волны, напротив, максимальна в направлении наиболее протяженной оси источника. Заметим, что очаги цунами в зонах субдукции, как правило, вытянуты вдоль

берега. В этой связи ближайшее к источнику цунами побережье часто оказывается подверженным волнам с максимальной амплитудой.



*Рис. 4.9. Профили волн, сформированных в результате эволюции симметричного Гауссова возмущения водной поверхности в последовательные моменты времени (указаны на рисунке в секундах). Пунктирная кривая – закон убывания амплитуды кольцевой волны с расстоянием, соответствующий закону сохранения энергии (3.9)*

На Рис. 4.9 показаны профили кольцевой волны, рассчитанные в последовательные моменты времени. Видно, что в отличие от одномерного случая положительное начальное возмущение создает не однополярную, а биполярную волну: вначале следует положительная фаза, а затем она сменяется отрицательной. Амплитуда лидирующей волны убывает при удалении от источника по закону  $A_1 \sim 1/\sqrt{r}$ , который, как это было показано в разделе 3.1, соответствует закону сохранения энергии (3.9). В силу того, что волна распространяется с заданной скоростью, имеет

силу связь  $r = c \cdot t$ , поэтому закон убывания амплитуды может быть также записан в форме  $A_1 \sim 1/\sqrt{t}$ .

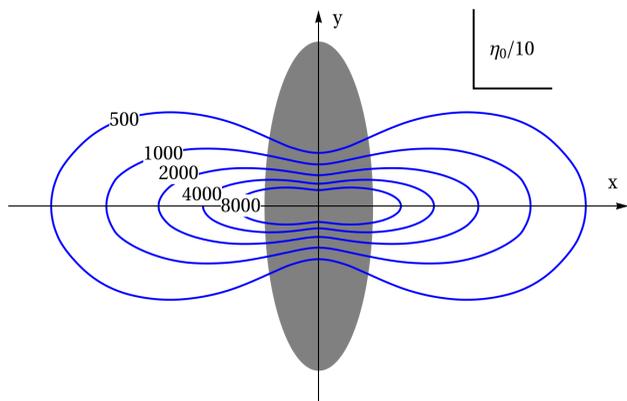


Рис. 4.10. Амплитуда лидирующей волны  $A_1$  как функция азимутального угла (диаграммы направленности). Форма и ориентация источника ( $a = 20$  км,  $b = 60$  км) показаны серым эллипсом. Расчет выполнен при  $H = 4$  км и  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup> для различных моментов времени (указаны у кривых в секундах). В правом верхнем углу показан масштаб амплитуды

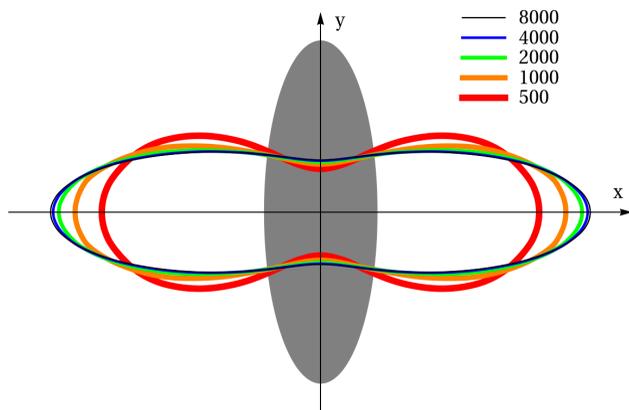


Рис. 4.11. Диаграммы направленности величины  $A_1\sqrt{t}$ . Цифры у кривых – моменты времени в секундах. Параметры расчета эквивалентны Рис. 4.10

На Рис. 4.10 представлены диаграммы направленности излучения волн асимметричным источником ( $a = 20 \text{ км}$ ,  $b = 60 \text{ км}$ ). Диаграммы представляют собой зависимость амплитуды лидирующей волны  $A_1$  от азимутального угла. Расчет выполнен при  $H = 4 \text{ км}$  и  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  для различных моментов времени, которые указаны на рисунке в секундах. Серым эллипсом показаны форма и ориентация источника волн. Из рисунка видно, что на всех временах зависимость амплитуды от азимутального угла характеризуется выраженной неоднородностью. Диаграммы направленности вытянуты в направлении, перпендикулярном наибольшей оси эллиптического источника (волны максимальной амплитуды бегут в направлении короткой оси). С увеличением времени амплитуда волн уменьшается по всем направлениям, при этом направленность сохраняется, но форма диаграмм направленности претерпевает некоторые изменения. Эти изменения удобно проследить по азимутальным распределениям амплитуды лидирующей волны, помноженной на корень из времени распространения  $A_1 \sqrt{t}$ . Соответствующие диаграммы представлены на Рис. 4.11. Из рисунка следует, что незначительные изменения формы диаграммы направленности происходят на не очень больших временах, когда волна еще находится вблизи источника. На больших временах диаграммы направленности стремятся к некоторой универсальной для данного источника форме. Существование предельной формы диаграммы направленности говорит о том, что вдали от источника в любом направлении амплитуда лидирующей волны убывает по закону  $A_1 \sim 1/\sqrt{t}$  ( $A_1 \sim 1/\sqrt{r}$ ).

### 4.3. Задачи потенциальной теории несжимаемой жидкости

#### 4.3.1. Аналитическое решение плоской задачи

В этом разделе мы рассмотрим двумерную (в плоскости  $Oxz$ ) задачу о генерации волн малыми динамическими деформациями

дна в неограниченном по горизонтали слое несжимаемой однородной жидкости постоянной глубины  $H$ . Начало прямоугольной системы координат  $0xz$  расположим на невозмущенной свободной поверхности, ось  $0z$  направим вертикально вверх, ось  $0x$  – по горизонтали. Постановка задачи представлена на Рис. 4.12.

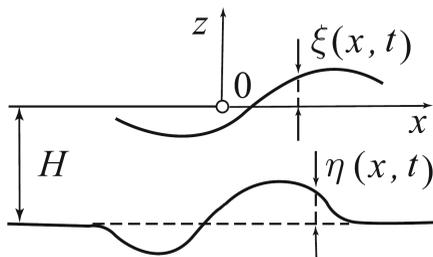


Рис. 4.12. Постановка плоской задачи о генерации волн динамической деформацией дна

Для нахождения возмущения свободной поверхности  $\xi(x,t)$  и поля скорости течения  $\mathbf{v}(x,z,t)$ , возникающих в слое жидкости при движениях дна, происходящих по закону  $\eta(x,t)$ , будем решать задачу относительно потенциала скорости течения  $F(x,z,t)$  (см. раздел 2.3)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \quad (4.30)$$

$$g \frac{\partial F}{\partial z} = - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad z=0, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad z=-H. \quad (4.32)$$

Физический смысл граничного условия (4.31) заключается в постоянстве давления на свободной поверхности жидкости. Граничное условие (4.32) означает равенство вертикальной

компоненты скорости течения и скорости движения дна (условие непротекания).

Смещение свободной поверхности и вектор скорости течения связаны с потенциалом скорости течения следующими формулами (см. раздел 2.3):

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{v} = (u, w) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial z} \right). \quad (4.34)$$

Уравнение Лапласа (4.30) решается стандартным методом разделения переменных (см. раздел 3.2). Опуская элементарные выкладки, выпишем общее решение задачи в виде разложений Лапласа и Фурье по временной и пространственным координатам:

$$F(x, y, z, t) = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(pt - ikx) \times \quad (4.35)$$

$$\times [A(p, k) \operatorname{ch}(kz) + B(p, k) \operatorname{sh}(kz)],$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа,  $k$  – волновое число. Подстановка общего решения (4.35) в граничное условие на поверхности (4.31) дает связь между коэффициентами  $A$  и  $B$ :

$$B(p, k) = -A(p, k) \frac{p^2}{gk}. \quad (4.36)$$

Применяя формулы прямого и обратного преобразований Лапласа и Фурье, получаем интегральное представление для закона движения дна:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(pt - ikx) H(p, k), \quad (4.37)$$

где

$$H(p, k) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-pt + ikx) \eta(x, t). \quad (4.38)$$

Используя представление (4.37), записываем правую часть граничного условия на дне (4.32). Левая часть (4.32) записывается

с использованием выражений (4.35) и (4.36). Несложные преобразования позволяют выразить коэффициент  $A(p, k)$ . В итоге приходим к выражению для потенциала скорости течения, который отвечает движениям дна бассейна, происходящим по закону  $\eta(x, t)$

$$F(x, z, t) = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \times \\ \times \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) \left[ gk - p^2 \operatorname{th}(kz) \right]}{k \operatorname{ch}(kH) \left[ gk \operatorname{th}(kH) + p^2 \right]} H(p, k). \quad (4.39)$$

Зная выражение для потенциала (4.39), по формулам (4.33) и (4.34) вычисляем смещение свободной поверхности и компоненты поля скорости течения

$$\xi(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p^2 \exp(pt - ikx)}{\operatorname{ch}(kH) \left[ gk \operatorname{th}(kH) + p^2 \right]} H(p, k), \quad (4.40)$$

$$u(x, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \times \\ \times \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) \left[ gk - p^2 \operatorname{th}(kz) \right]}{\operatorname{ch}(kH) \left[ gk \operatorname{th}(kH) + p^2 \right]} H(p, k), \quad (4.41)$$

$$w(x, z, t) = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \times \\ \times \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) \left[ gk \operatorname{th}(kz) - p^2 \right]}{\operatorname{ch}(kH) \left[ gk \operatorname{th}(kH) + p^2 \right]} H(p, k). \quad (4.42)$$

При любом пространственно-временном законе деформации дна смещение свободной поверхности и поле скорости течения могут быть вычислены по формулам (4.40)-(4.42). Но в общем случае решение этой задачи сопряжено с вычислением четырехкратных интегралов. Для облегчения расчетных процедур мы в дальнейшем ограничимся поршневой и мембранной подвижками, которые

описываются формулами (4.6)-(4.9). Простые законы деформации дна позволяют 3 интеграла из 4 рассчитать аналитически.

Рассмотрим в качестве вспомогательного «линейный» временной закон движения дна – движение дна начинается в момент времени  $t=0$  и продолжается бесконечно, причем смещение нарастает линейно во времени:

$$T_L(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/\tau, & t > 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Пользуясь функцией  $T_L$ , можно составить законы движения дна для поршневой и мембранной подвижек (см. (4.8) и (4.9)):

$$T_1 = T_L(t) - T_L(t - \tau), \quad (4.44)$$

$$T_2 = 2T_L(t) - 4T_L(t - \tau/2) + 2T_L(t - \tau). \quad (4.45)$$

Рассматриваемая задача (4.30)-(4.32) является линейной, поэтому к ней применим принцип суперпозиции. Если найти решение задачи для «линейного» временного закона движения дна  $F_L$ , то структура решений для поршневой и мембранной подвижек будет повторять структуру формул (4.44) и (4.45):

$$F_1 = F_L(t) - F_L(t - \tau), \quad (4.46)$$

$$F_2 = 2F_L(t) - 4F_L(t - \tau/2) + 2F_L(t - \tau). \quad (4.47)$$

Структура выражений, описывающих смещение свободной поверхности и поле скорости течения, будет эквивалентна (4.46) и (4.47).

Далее остановимся на вычислении интегралов, входящих в формулу (4.38). Для функции  $\eta_L(x, t) = \eta_0[\theta(x+a) - \theta(x-a)]T_L(t)$  эти интегралы легко рассчитываются аналитически

$$H_L(p, k) = \frac{\eta_0}{\tau} \int_0^{\infty} dt \int_{-a}^{+a} dx \exp(-pt + ikx) t = \frac{2\eta_0 \sin(ak)}{\tau k p^2}. \quad (4.48)$$

Подстановка (4.48) в (4.39) дает

$$F_L = -\frac{2\eta_0}{4\pi^2 i\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\exp(-ikx) ch(kz) \sin(ak)}{k^2 ch(kH)} \times \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \frac{\exp(pt) [gk - p^2 th(kz)]}{p [gk th(kH) + p^2]}. \quad (4.49)$$

Интеграл по  $dp$  в выражении (4.49) вычисляется при помощи теории вычетов [Свешников, Тихонов, 1999]. Контур интегрирования показан на Рис. 4.13. В соответствии с основной теоремой теории вычетов имеет силу следующее выражение:

$$s+i\sqrt{R^2-s^2} \int_{s-i\sqrt{R^2-s^2}}^{s+i\sqrt{R^2-s^2}} I(p) dp + \int_R I(p) dp = \quad (4.50)$$

$$= 2\pi i [res(I(p), +ip_0) + res(I(p), 0) + res(I(p), -ip_0)],$$

$$I(p) = \frac{\exp(pt) [gk - p^2 th(kz)]}{p [gk th(kH) + p^2]}, \quad (4.51)$$

$$p_0 = \sqrt{gk th(kH)}. \quad (4.52)$$

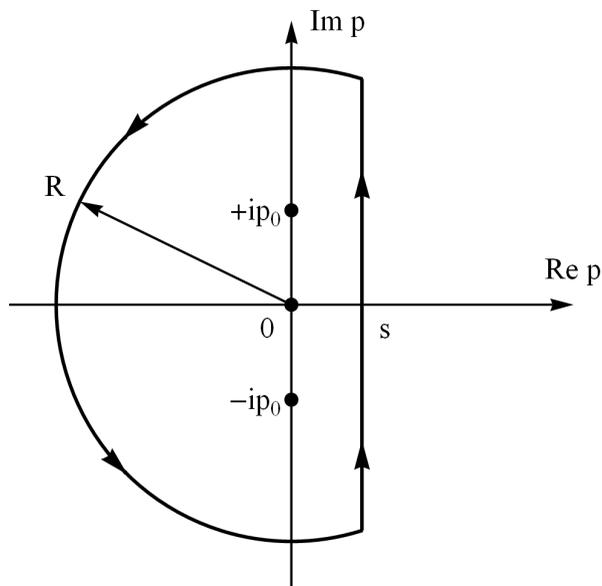


Рис. 4.13. Контур интегрирования

Интересующий нас интеграл, точнее его предельное значение при  $R \rightarrow \infty$ , стоит на первом месте в левой части выражения

(4.50). Второй интеграл в левой части (4.50) берется по дуге окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат, лежащей левее прямой  $p = s$ , — эта дуга окружности замыкает контур интегрирования. Радиус  $R$  выбирается таким образом, чтобы полюса подынтегральной функции  $(-ip_0, 0, +ip_0)$  лежали внутри контура интегрирования. Это требование, очевидно, удовлетворяется в предельном случае при  $R \rightarrow \infty$ .

Заметим, что величина  $p_0$  имеет размерность частоты, а выражение (4.52) эквивалентно дисперсионному соотношению для гравитационных волн на воде (см. раздел 3.2). Таким образом, можно сказать, гравитационные волны, возбуждаемые динамическими деформациями дна, обязаны существованию полюсов подынтегральной функции (4.51)  $p = \pm ip_0$ . Третий полюс  $p = 0$  (нулевая частота) соответствует стационарным процессам.

Далее покажем, что 2-й интеграл в левой части (4.50) при  $R \rightarrow \infty$  стремится к нулю

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_R I(p) dp \right] = 0. \quad (4.53)$$

Если (4.53) верно, то искомый интеграл просто определяется суммой вычетов. Для вычисления предела (4.53) целесообразно сделать замену переменных:

$$p = \operatorname{Re}(p) + i \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Re} e^{i\varphi}. \quad (4.54)$$

Учитывая, что  $dp = R i e^{i\varphi} d\varphi$ , после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_R I(p) dp \right] &= \\ &= -i th(kz) \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_R \exp[t R (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))] d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

В полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) < 0$  действительная часть аргумента подынтегральной функции (4.55) отрицательна ( $\cos(\varphi) < 0$ ,  $t > 0$ ,

$R > 0$ ), следовательно, при  $R \rightarrow \infty$  значение интеграла экспоненциально стремится к нулю.

Теперь остается показать, что сумма значений интегралов, которые вычисляются по двум дугам рассматриваемой окружности радиуса  $R$ , лежащим между прямыми  $p=0$  и  $p=s$ , также стремится к нулю при больших значениях  $R$ . Речь идет о следующих двух интегралах:

$$I_1 = \int_{\pi/2-s/R}^{\pi/2} d\varphi \exp\left[t R e^{i\varphi}\right], \quad (4.56)$$

$$I_2 = \int_{3\pi/2}^{3\pi/2+s/R} d\varphi \exp\left[t R e^{i\varphi}\right]. \quad (4.57)$$

В выражениях (4.56) и (4.57) целесообразно сделать замену переменных ( $\varphi_1 = \varphi - \pi/2$ ,  $\varphi_2 = \varphi - 3\pi/2$ ):

$$I_1 = \int_{-s/R}^0 d\varphi_1 \exp\left[t R e^{i(\varphi_1+\pi/2)}\right], \quad (4.58)$$

$$I_2 = \int_0^{s/R} d\varphi_2 \exp\left[t R e^{i(\varphi_2+3\pi/2)}\right]. \quad (4.59)$$

Учитывая малость величины  $s/R$ , разложим подынтегральные выражения в (4.58) и (4.59) в ряд Тейлора и удержим только линейные члены разложения

$$\exp\left[t R e^{i(\varphi_1+\pi/2)}\right] \approx \exp[iRt](1 - Rt\varphi_1), \quad (4.60)$$

$$\exp\left[t R e^{i(\varphi_2+3\pi/2)}\right] \approx \exp[-iRt](1 + Rt\varphi_2). \quad (4.61)$$

С учетом (4.60) и (4.61) интегрирование в (4.58) и (4.59) легко выполнить аналитически. В итоге сумма двух интегралов дается следующим выражением:

$$I_1 + I_2 = \frac{s(2 + st) \cos(Rt)}{R}. \quad (4.62)$$

Из (4.62) видно, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} (I_1 + I_2) = 0$ .

В силу того, что при неограниченном росте радиуса дуги окружности, замыкающей контур интегрирования, интеграл по этой дуге стемится к нулю, можно записать:

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \frac{\exp(pt) \left[ gk - p^2 th(kz) \right]}{p \left[ gk th(kH) + p^2 \right]} = 2\pi i \sum \text{res}(I(p), 0, \pm i p_0) =$$

$$= \frac{2\pi i}{th(kH)} \left( 1 - \left[ 1 + th(kH) th(kz) \right] \cos(t p_0) \right). \quad (4.63)$$

В итоге для потенциала имеем выражение, в котором остался только один интеграл

$$F_L = -\frac{\eta_0}{\pi \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \times$$

$$\times \frac{\exp(-ikx) ch(kz) \sin(ak) \left( 1 - \left[ 1 + th(kH) th(kz) \right] \cos(t p_0) \right)}{k^2 sh(kH)}. \quad (4.64)$$

Применяя к потенциалу (4.64) формулы (4.33) и (4.34), находим выражения для смещения свободной поверхности и компонент скорости течения

$$\xi_L = \frac{\eta_0}{\pi \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\exp(-ikx) \sin(ak) \sin(t p_0)}{p_0 k ch(kH)}, \quad (4.65)$$

$$u_L = \frac{\eta_0 i}{\pi \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \times$$

$$\times \frac{\exp(-ikx) ch(kz) \sin(ak) \left( 1 - \left[ 1 + th(kH) th(kz) \right] \cos(t p_0) \right)}{k sh(kH)}, \quad (4.66)$$

$$w_L = -\frac{\eta_0}{\pi \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \times \frac{\exp(-ikx) \sin(ak) (sh(kz) - [sh(kz) + th(kH) ch(kz)] \cos(t p_0))}{k sh(kH)} \quad (4.67)$$

Интегралы в формулах (4.65)-(4.67) легко рассчитываются численно. Примечательно, что во всех рассматриваемых формулах мнимые части подынтегральных выражений оказываются нечетными функциями, которые при интегрировании в симметричных пределах дают нулевой вклад. Действительные части подынтегральных выражений, напротив, являются четными функциями, что позволяет вести интегрирование не от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а от 0 до  $+\infty$ . Во всех случаях подынтегральная функция экспоненциально быстро убывает с ростом волнового числа, поэтому бесконечные пределы интегрирования могут быть заменены конечными пределами.

Вычислительные процедуры при расчете интегралов (4.65)-(4.67) можно дополнительно облегчить, если перейти к безразмерным переменным. Система обезразмеривания, которую мы использовали в разделе 4.1, рассматривая одномерные задачи теории длинных волн, здесь не совсем подходит. Более удобным будет выбор глубины океана  $H$  в качестве масштаба длин. Тогда в качестве масштаба времени будет выступать время распространения длинной волны на расстояние, равное глубине океана  $\sqrt{H/g}$ . Величина  $\eta_0$ , как и прежде, будет представлять масштаб смещения дна и поверхности воды. Безразмерные переменные (обозначим их знаком «\*») вычисляются с использованием следующего набора формул:

$$x^* = x/H, \quad z^* = z/H, \quad a^* = a/H, \quad k^* = kH, \quad (4.68)$$

$$t^* = t\sqrt{g/H}, \quad \tau^* = \tau\sqrt{g/H}, \quad \xi^* = \xi/\eta_0.$$

Приведем формулы (4.65)-(4.67) к безразмерному виду. С учетом набора формул (4.68) для смещения свободной поверхности (4.65) получаем

$$\xi_L^* = \frac{1}{\pi \tau^*} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^* \frac{\exp(-ik^* x^*) \sin(a^* k^*) \sin\left(t^* \sqrt{k^* th(k^*)}\right)}{\sqrt{k^* th(k^*)} k^* ch(k^*)}. \quad (4.69)$$

Далее, перепишем формулу (4.69), воспользовавшись свойством четности подынтегральной функции (нечетная мнимая часть обращается в ноль)

$$\xi_L^* = \frac{2}{\pi \tau^*} \int_0^{+\infty} dk^* \frac{\cos(k^* x^*) \sin(a^* k^*) \sin\left(t^* \sqrt{k^* th(k^*)}\right)}{\sqrt{k^* th(k^*)} k^* ch(k^*)}. \quad (4.70)$$

Выполняя аналогичные преобразования с формулами для компонент скорости течения (4.66) и (4.67), приходим к следующим выражениям:

$$u_L^* = \frac{2}{\pi \tau^*} \int_0^{+\infty} dk^* \sin(k^* x^*) ch(k^* z^*) \sin(a^* k^*) \times \\ \times \frac{\left(1 - [1 + th(k^*) th(k^* z^*)] \cos\left(t^* \sqrt{k^* th(k^*)}\right)\right)}{k^* sh(k^*)}, \quad (4.71)$$

$$w_L^* = -\frac{2}{\pi \tau^*} \int_0^{+\infty} dk^* \cos(k^* x^*) \sin(a^* k^*) \times \\ \times \frac{\left(sh(k^* z^*) - [sh(k^* z^*) + th(k^*) ch(k^* z^*)] \cos\left(t^* \sqrt{k^* th(k^*)}\right)\right)}{k^* sh(k^*)}, \quad (4.72)$$

где  $u_L^* = u_L / (\eta_0 \sqrt{g/H})$  и  $w_L^* = w_L / (\eta_0 \sqrt{g/H})$  – безразмерные компоненты скорости течения. Видно, что при обезразмеривании у нас автоматически получился еще один масштаб – масштаб скорости течения  $\eta_0 \sqrt{g/H}$ . Заметим, что если под величиной  $\eta_0$  понимать амплитуду цунами, то этот масштаб представляет собой хорошую оценку скорости течения в распространяющейся волне.

Выражения (4.70)-(4.72) позволяют рассчитать смещение свободной поверхности и компоненты скорости течения в случае «линейной подвижки». Формулы для расчета соответствующих

величин для поршневой (индекс «1») и мембранной (индекс «2») подвижек имеют следующий вид:

$$\xi_1^* = \xi_L^*(t^*) - \xi_L^*(t^* - \tau^*), \quad (4.73)$$

$$\xi_2^* = 2\xi_L^*(t^*) - 4\xi_L^*(t^* - \tau^*/2) + 2\xi_L^*(t^* - \tau^*). \quad (4.74)$$

Формулы для вычисления компонент скорости имеют структуру, эквивалентную (4.73) и (4.74), поэтому мы их выписывать не будем.

Из выражений (4.70)-(4.72) видно, что свойства волн, формируемых поршневой или мембранной подвижками дна, определяются не одним безразмерным параметром, как это было в теории длинных волн, а двумя: размером источника  $a^*$  и длительностью подвижки  $\tau^*$ . Кроме того, свойства волн дополнительно зависят как от удаления от источника  $x^*$ , так и от момента времени  $t^*$ . Дело в том, что волны, описываемые потенциальной теорией, подвержены фазовой дисперсии. Волновое возмущение по мере распространения постоянно трансформируется, и его амплитуда и форма не являются фиксированными, как это было в случае одномерной теории длинных волн. Для полноты картины следует отметить еще одну безразмерную величину, от которой зависят характеристики поля скорости течения – вертикальная координата  $z^*$ . Это отличительная особенность потенциальной теории волн. Напомним, что в теории длинных волн скорость не зависит от вертикальной координаты.

### 4.3.2. Генерация волн в канале поршневой и мембранной подвижками

На Рис. 4.14 представлены примеры волновых полей, которые были рассчитаны с использованием формул (4.70)-(4.73). В качестве источника волн рассматривалась поршневая подвижка (быстрое поднятие участка дна), параметры которой свойственны реальным источникам цунами ( $a/H = 5$ ,  $\tau\sqrt{g/H} = 1$ ). На рисунке изображены следующие элементы: деформация дна (серый прямоугольник), смещение свободной поверхности (синяя кривая)

и поле скорости течения (черные стрелки). Расчет выполнен в последовательные моменты времени, которые указаны на рисунке.

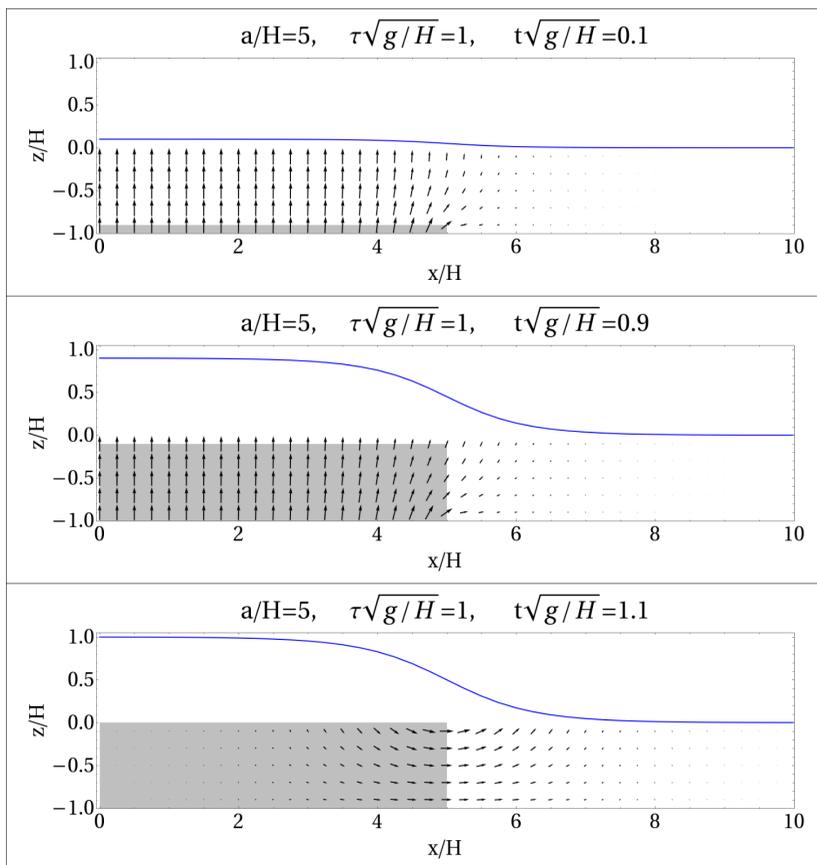


Рис. 4.14 а. Генерация волны цунами поришневой подвижкой дна (серый прямоугольник): смещение свободной поверхности (синяя кривая) и поле скорости течения (черные стрелки). Расчет выполнен по формулам (4.70)-(4.73). Значения параметров и моменты времени указаны на рисунке

Из Рис. 4.14 а видно, что во время подвижки над областью деформации дна весь водный слой движется в вертикальном направлении. Скорость этого движения равна скорости поднятия

дна  $\eta_0/\tau$  В процессе подвижки поле скорости течения остается практически неизменным. Сразу после завершения подвижки скорость течения над источником обнуляется, но при этом развивается течение вблизи границы источника – так начинает формироваться волна цунами.

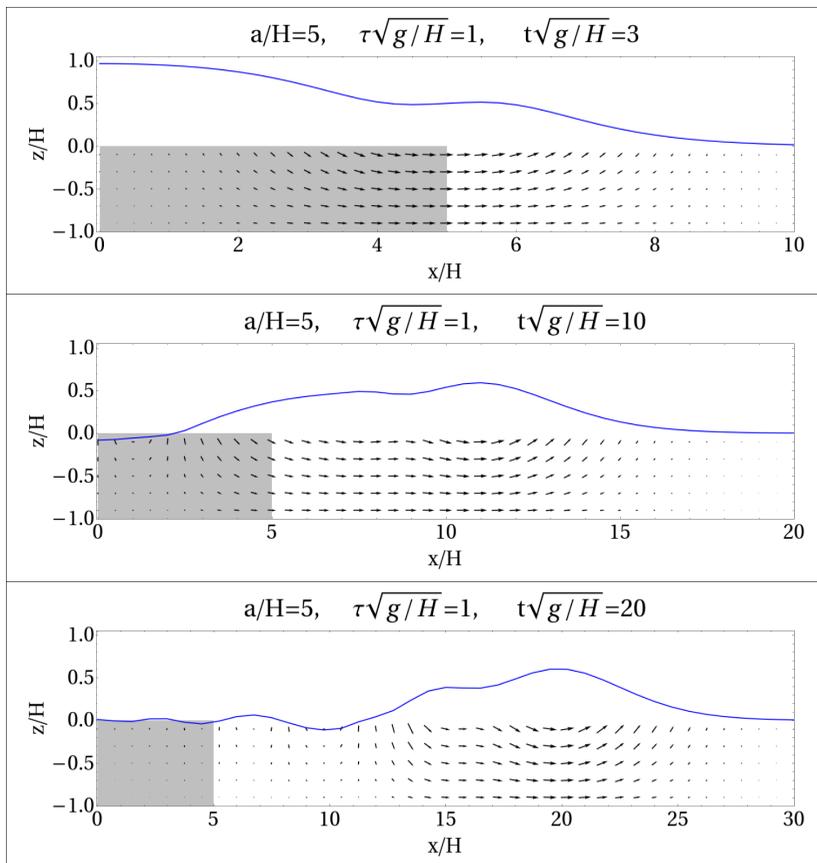


Рис. 4.14 б. Генерация волны цунами поришневой подвижкой дна. Обозначения эквивалентны Рис. 4.14 а

Поведение водного слоя в последующие моменты времени представлено на Рис. 4.14 б. Видно, как область, охваченная течением, расширяется с течением времени и развивается волновое

100

возмущение на свободной поверхности. Заметим, что течение в рассматриваемой области ( $x \geq 0$ ) направлено главным образом в положительном направлении оси  $Ox$ . Вода, вытесненная поднятием дна под действием силы тяжести стремится покинуть область источника. К моменту времени  $t\sqrt{g/H} = 10$  формирование волны практически завершается, и течение над областью источника ослабевает. В дальнейшем течение сосредоточено преимущественно под гребнем бегущей волны. Впрочем, волновое поле имеет сложную структуру: за лидирующей волной следует типичный диспергирующий «хвост», в котором также имеют место слабые течения переменного направления.

Полезно сопоставить волновые возмущения, рассчитанные в рамках двух подходов: теории длинных волн и потенциальной теории. Такое сопоставление помогает понять, как проявляется ограниченность теории длинных волн, и когда эта теория может давать адекватные результаты при моделировании волн цунами.

На Рис. 4.15 и Рис. 4.16 представлены профили волн, сформированных поршневой и мембранной подвижками. Сплошными линиями показаны волновые формы, полученные в рамках потенциальной теории с применением формул (4.70) и (4.73). Пунктирными линиями показаны волновые формы, рассчитанные с применением теории длинных волн по формуле (4.5). Параметры расчета указаны на рисунках. Из рисунков можно сделать заключение, что между волновыми профилями, полученными в рамках двух означенных теорий, наблюдаются заметные различия. Но для случая поршневой подвижки эти различия не носят принципиального характера. Амплитуда волновых возмущений, а также время вступления волны в целом согласуются удовлетворительно. Различия принимают принципиальный характер для мембранной подвижки (Рис. 4.16). Здесь теория длинных волн примерно на порядок переоценивает амплитуду волнового возмущения. Формы волновых возмущений вообще имеют мало общего. Вместо пары треугольных импульсов, получаемых в рамках длинноволновой теории, потенциальная теория дает диспергирующий волновой пакет.

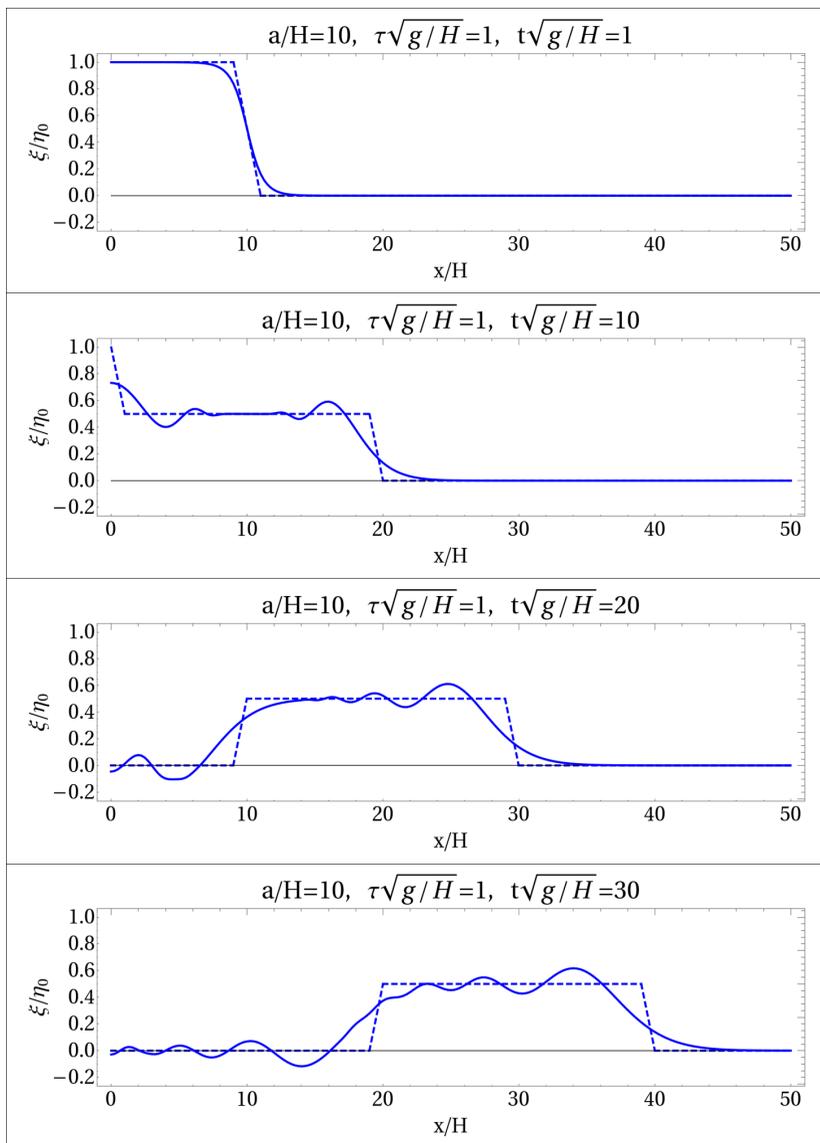


Рис. 4.15. Сопоставление профилей волн, рассчитанных с применением потенциальной теории (сплошная линия) и теории длинных волн (пунктир). Источник волн – поршневая подвижка. Параметры расчета указаны на рисунке

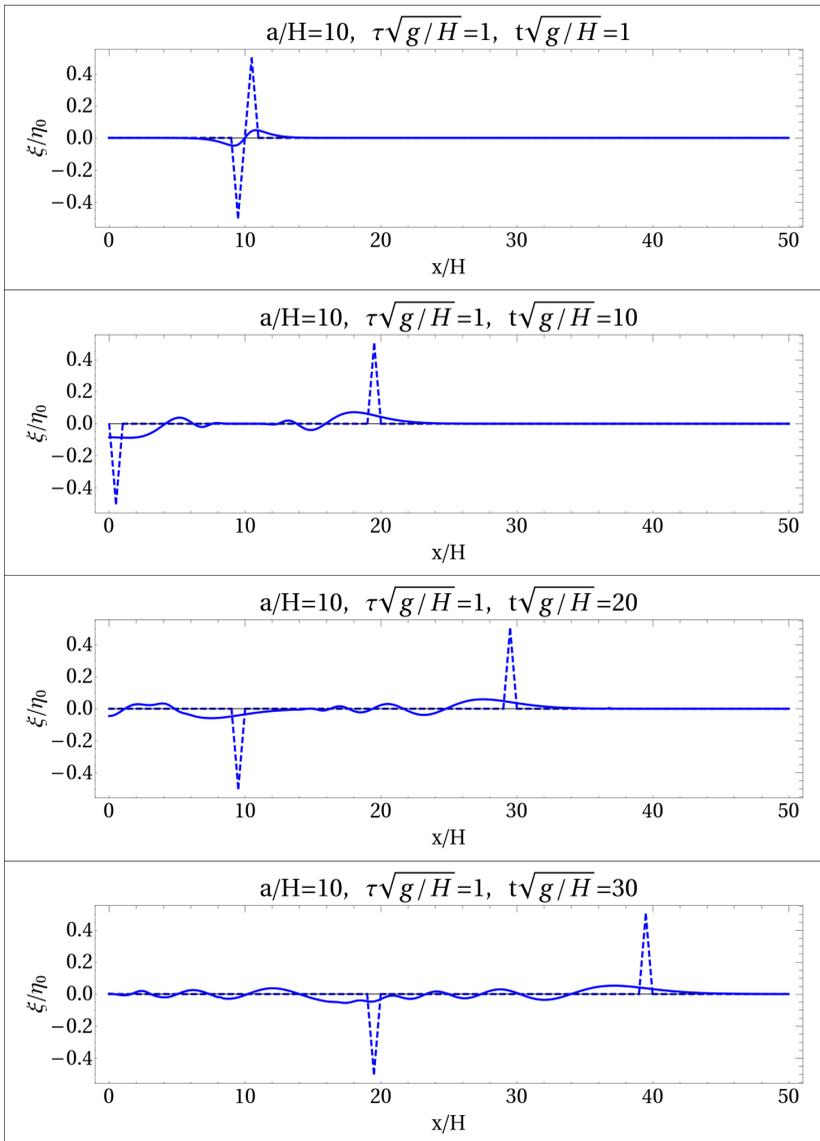


Рис. 4.16. Сопоставление профилей волн, рассчитанных с применением потенциальной теории (сплошная линия) и теории длинных волн (пунктир). Источник волн – мембранная подвижка. Параметры расчета указаны на рисунке

Анализ Рис. 4.15 и Рис 4.16 дает возможность еще раз вернуться к вопросу об эффективности генерации цунами быстрыми деформациями дна. Видно, что скоротечная подвижка с остаточным смещением способна создавать волны значительной амплитуды и энергии. Скоротечная подвижка без остаточного смещения оказывается абсолютно неэффективной.

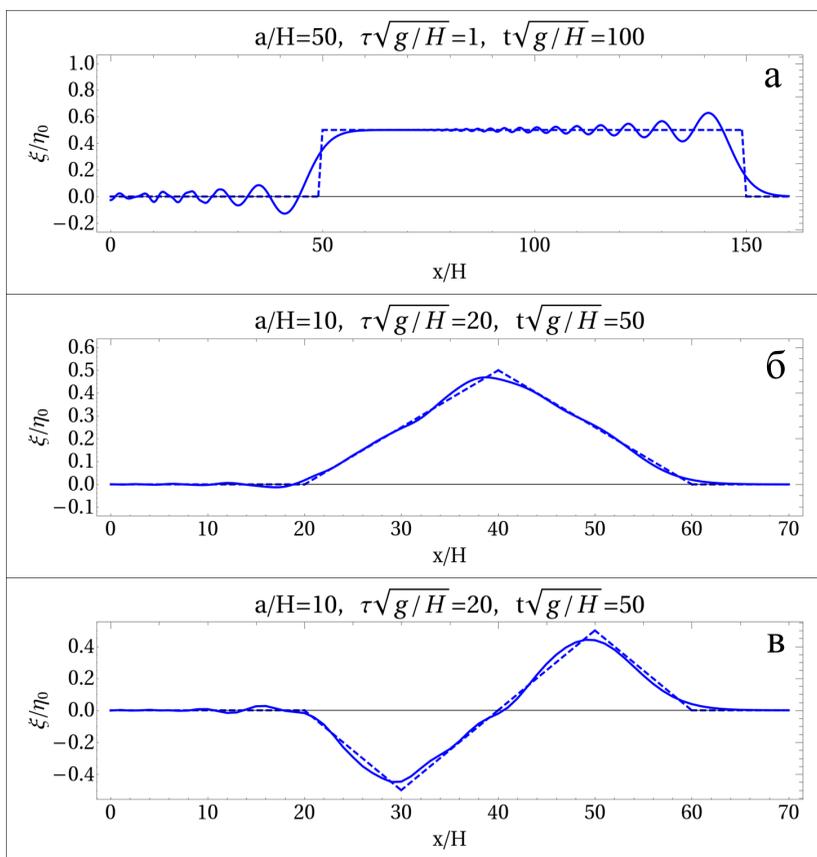


Рис. 4.17. Сопоставление профилей волн, рассчитанных с применением потенциальной теории (сплошная линия) и теории длинных волн (пунктир). Источник волн поршневая (а, б) и мембранная (в) подвижки. Параметры расчета указаны на рисунке

При определенных условиях теория длинных волн и потенциальная теория могут давать близкие результаты. *Первый пример* такой ситуации представлен на Рис. 4.17а. Здесь использован большой размер источника ( $a/H = 50$ ). Видно, при протяженном источнике дисперсионные эффекты становятся малосущественными, в том смысле, что на энергию волны цунами эти эффекты влияют мало. Но следует заметить, что дисперсионные эффекты никуда не исчезают, и, следовательно, даже при неограниченном росте размера источника невозможно добиться полного совпадения волновых форм. *Второй пример* показан на Рис. 4.17 б, в. Он соответствует значительной продолжительности поршневой (б) и мембранной (в) подвижек ( $\tau\sqrt{g/H} = 20$ ). В этом случае профили волн действительно становятся весьма близкими. Очевидно, что при дальнейшем увеличении продолжительности подвижки различия исчезнут вовсе.

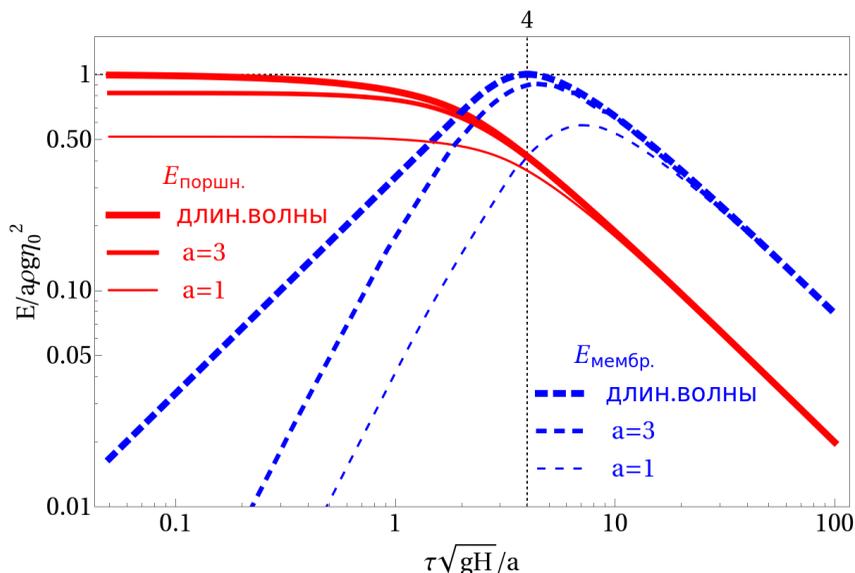


Рис. 4.18. Энергия волн, возбуждаемых поршневой (сплошная линия) и мембранной (пунктир) подвижками, как функция продолжительности подвижки. Сопоставление результатов, получаемых в рамках теории длинных волн и потенциальной теории при различных размерах источника (указаны на рисунке)

В заключение раздела сопоставим энергии волн, получаемые в рамках теории длинных волн и потенциальной теории. Сопоставлять будем зависимости энергии от продолжительности подвижки (для поршневой и мембранной). Длинноволновая теория дает зависимости (4.15) и (4.16). Для вычисления энергии волн в рамках потенциальной теории воспользуемся формулой для потенциальной энергии (4.12). Соответствующий интеграл рассчитывался численно. Результаты представлены на Рис. 4.18. Характер зависимостей для поршневой и мембранной подвижек в целом сохраняется. Для поршневой подвижки зависимость монотонная – энергия убывает при увеличении продолжительности. Уменьшение размера источника ведет к уменьшению энергии, но размер источника заметно влияет на результат только при  $a \sim H$ . Для мембранной подвижки зависимость характеризуется локальным максимумом. Примечательно, что уменьшение размера источника не только приводит к уменьшению энергии, но и смещает максимум вправо – в область больших продолжительностей.

Интересно, что в случае поршневой подвижки увеличение размера источника приближает кривую, рассчитанную в рамках потенциальной теории, к предельному случаю – теории длинных волн. Для мембранной подвижки это правило не работает. При коротких подвижках рост размера источника, конечно, приводит к увеличению энергии, но сам характер зависимости, соответствующей потенциальной теории отличается от того, что дает теория длинных волн.

### 4.3.3. Пространственная задача

От плоской задачи, решение которой было получено и проанализировано в предшествующих двух разделах, перейдем к пространственной (трехмерной) задаче. Будем рассматривать безграничный по горизонтали слой однородной несжимаемой жидкости постоянной глубины  $H$ . Начало прямоугольной системы координат  $Oxyz$  расположим на невозмущенной свободной поверхности, ось  $Oz$  направим вертикально вверх, оси  $Ox$  и  $Oy$  – по горизонтали. Соответствующая постановка задачи

представлена на Рис. 2.1. При переходе от двумерной к трехмерной постановке оператор Лапласа становится трехмерным за счет добавления  $y$ -й горизонтальной координаты

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0. \quad (4.75)$$

Граничные условия на свободной поверхности (4.31) и на дне (4.32) остаются без изменений.

Детали построения аналитического решения задачи были подробно описаны в разделе 4.3.1 для двумерного случая. Добавление еще одной координаты не создает никаких принципиальных сложностей на пути построения решения, поэтому мы сразу выпишем итоговый набор формул.

$$F = -\frac{1}{8\pi^3} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_{-\infty}^{+\infty} dn \times \frac{p \exp(pt - imx - iny) \operatorname{ch}(kz) \left[ gk - p^2 \operatorname{th}(kz) \right]}{k \operatorname{ch}(kH) \left[ gk \operatorname{th}(kH) + p^2 \right]} H(p, m, n), \quad (4.76)$$

$$\xi = \frac{1}{8\pi^3} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_{-\infty}^{+\infty} dn \frac{p^2 \exp(pt - imx - iny)}{\operatorname{ch}(kH) \left[ gk \operatorname{th}(kH) + p^2 \right]} H(p, m, n), \quad (4.77)$$

$$u = \frac{1}{8\pi^3} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_{-\infty}^{+\infty} dn \times \frac{m p \exp(pt - imx - iny) \operatorname{ch}(kz) \left[ gk - p^2 \operatorname{th}(kz) \right]}{k \operatorname{ch}(kH) \left[ gk \operatorname{th}(kH) + p^2 \right]} H(p, m, n), \quad (4.78)$$

$$v = \frac{1}{8\pi^3} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_{-\infty}^{+\infty} dn \times$$

$$\times \frac{n p \exp(pt - imx - iny) ch(kz) \left[ gk - p^2 th(kz) \right]}{k ch(kH) \left[ gk th(kH) + p^2 \right]} H(p, m, n), \quad (4.79)$$

$$w = -\frac{1}{8\pi^3 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_{-\infty}^{+\infty} dn \times$$

$$\times \frac{p \exp(pt - imx - iny) ch(kz) \left[ gk th(kz) - p^2 \right]}{ch(kH) \left[ gk th(kH) + p^2 \right]} H(p, m, n), \quad (4.80)$$

$$H(p, m, n) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-pt + imx + iny) \eta(x, y, t), \quad (4.81)$$

$$k^2 = m^2 + n^2. \quad (4.82)$$

Выражения (4.76)-(4.81) дают исчерпывающее решение трехмерной задачи (4.75), (4.31) и (4.32). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением смещения свободной поверхности, которое представляет собой наиболее наглядную характеристику. Поле скорости в пространственном случае не имеет каких-либо интересных особенностей, отличающих его от рассмотренного в разделе 4.3.2 двумерного случая.

Для того чтобы часть вычислений в (4.77) можно было выполнить аналитически, следует задать конкретный вид функции  $\eta(x, y, t)$ , которая описывает пространственно-временной закон деформации дна. Здесь мы ограничимся подвижкой дна с остаточным смещением (поршневой)

$$\eta(x, y, t) =$$

$$= \eta_0 [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \cdot [\theta(y+b) - \theta(y-b)] \cdot \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/\tau, & 0 < t \leq \tau, \\ 1, & t > \tau, \end{cases} \quad (4.83)$$

где  $\eta_0$  – амплитуда деформации дна,  $a$  и  $b$  – параметры, определяющие протяженность источника по осям  $0x$  и  $0y$  соответственно. Источник имеет в плане форму прямоугольника размерами  $2a \times 2b$ .

Подставим выражение (4.83) в формулу (4.81). Все три интеграла легко вычисляются аналитически. Полученное выражение для  $H(p, m, n)$  подставляем в формулу (4.77). Интеграл по параметру  $p$  вычисляем с использованием теории вычетов (см. раздел 4.3.1). В итоге приходим искомому выражению, которое описывает волновое возмущение свободной поверхности, вызванное деформацией дна вида (4.83). Сразу запишем это выражение в безразмерных переменных, принимая во внимание четность действительной части и нечетность мнимой части подынтегральной функции

$$\xi^* = \xi_L^*(t^*) - \xi_L^*(t^* - \tau^*), \quad (4.84)$$

$$\zeta_L^* = \frac{4}{\pi^2 \tau_0^*} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dm^* dn^* \times \\ \times \frac{\sin(m^* a^*) \sin(n^* b^*) \cos(m^* x^*) \cos(n^* y^*) \sin(t^* \sqrt{k^* th(k^*)})}{m^* n^* ch(k^*) \sqrt{k^* th(k^*)}}.$$

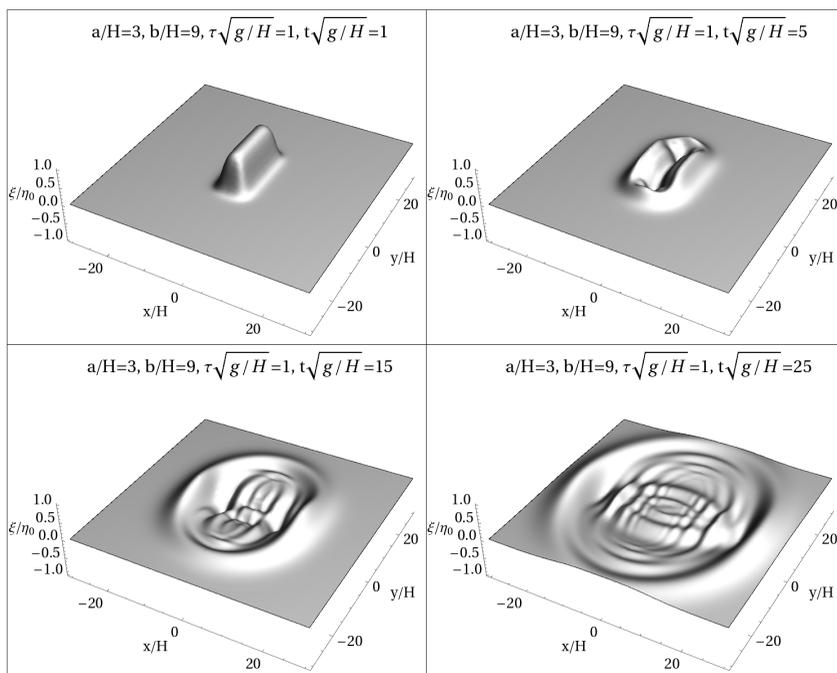
Переход к безразмерным переменным в (4.84) проводился по формулам (4.68), к которым в трехмерном случае добавляются следующие три связи:

$$y^* = y / H, \quad m^* = mH, \quad n^* = nH. \quad (4.85)$$

Интеграл в (4.84) легко может быть рассчитан численно. В силу быстрого убывания подынтегральной функции пределы интегрирования можно выбрать конечными.

На Рис. 4.19 представлен вид возмущения свободной поверхности, вызванного поршневой подвижкой (4.83). Расчет выполнен для нескольких последовательных моментов времени. Параметры расчета указаны на рисунке. Видно, что сразу после окончания деформации дна на поверхности образуется возмущение плавной формы, которое вытянуто вдоль оси  $0y$ . Подчеркнем, что это возмущение отличается по форме от прямоугольного параллелепипеда, задаваемого пространственной

частью формулы (4.83). По сравнению с деформацией дна возмущение поверхности воды является сглаженным. Сглаживающий эффект обязан быстро затухающей функции  $1/ch(kH)$ , которая модулирует пространственный спектр поверхностных волн в формуле (4.77). Подробнее сглаживающий эффект будет обсуждаться в разделах 4.4 и 5.1.



*Рис. 4.19. Волновое возмущение свободной поверхности, вызванное поршневой подвижкой (4.83). Расчет выполнен по формуле (4.84). Значения параметров, при которых выполнен расчет, указаны на рисунке*

Дальнейшую эволюцию волнового возмущения удобно отслеживать не только по Рис. 4.19, но и по Рис. 4.20, на котором представлены профили волн, рассчитанные в фиксированные моменты времени вдоль осей  $0x$  ( $y=0$ ) и  $0y$  ( $x=0$ ). Видно, что впереди бежит относительно длинная лидирующая волна,

амплитуда которой максимальна в направлении короткой оси источника (в направлении оси  $0x$ ). Лидирующая волна распространяется со скоростью длинных волн – максимально возможной в рассматриваемом случае скоростью распространения волнового возмущения. За лидирующей волной следуют короткие волны, которые, в соответствии с законом дисперсии для гравитационных волн на воде (см. раздел 3.2), распространяются медленнее. Эти волны формируют протяженный диспергирующий «хвост».

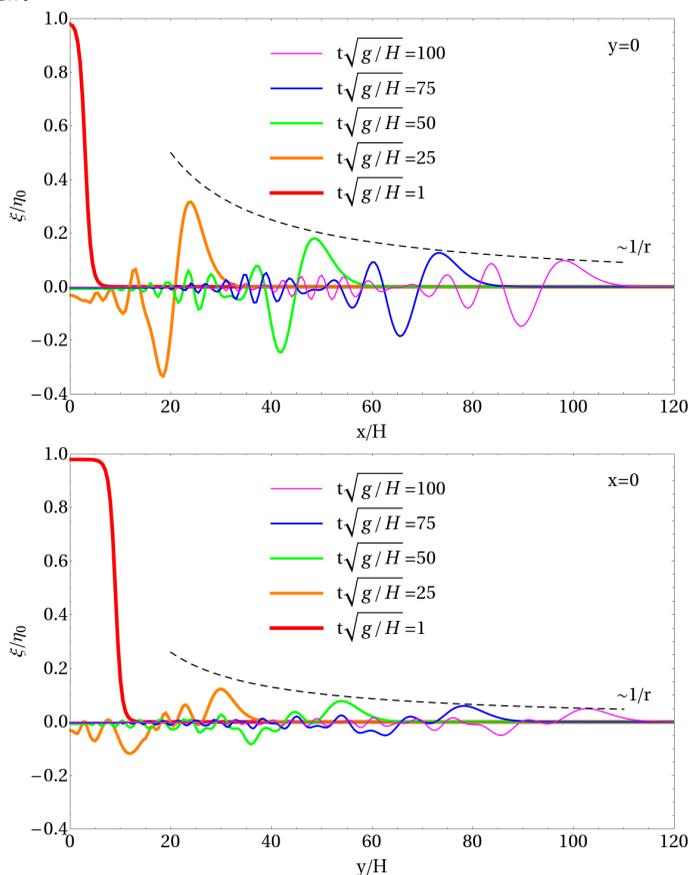


Рис. 4.20. Профили волн, рассчитанные вдоль осей  $0x$  ( $y=0$ ) и  $0y$  ( $x=0$ ). Значения параметров, при которых выполнен расчет, указаны на рисунке

Пунктирными кривыми на Рис. 4.20 показан закон убывания амплитуды волн с расстоянием. Напомним, что для длинных волн, в соответствии с законом сохранения энергии, амплитуда убывает только в силу увеличения длины волнового фронта  $\sim 1/\sqrt{r}$ . Для диспергирующих волн амплитуда убывает заметно быстрее  $\sim 1/r$ . Это никак не противоречит закону сохранения энергии. Дело в том, что амплитуда диспергирующих волн убывает не только из-за увеличения длины волнового фронта, но и из-за дисперсионного расплывания волнового возмущения в радиальном направлении.

#### 4.4. Задача потенциальной теории сжимаемой жидкости

В разделе 2.4 было показано, что описание генерации волн в слое однородной сжимаемой жидкости динамическими деформациями дна малой амплитуды сводится к решению волнового уравнения (2.60) с граничными условиями на поверхности (2.36) и дне (2.37). Как и в предыдущих разделах нас будет интересовать возможность получения аналитических решений, поэтому далее мы ограничимся случаем бассейна постоянной глубины. При  $H = const$  граничное условие на дне принимает простой вид (4.32). Для бассейна с произвольным распределением глубин задача (2.60), (2.36), (2.37) может быть решена только с применением численных методов [Nosov, Kolesov, 2007; Носов, Колесов, 2019].

Будем решать двумерную (плоскую) задачу в прямоугольной системе координат  $Oxz$  (Рис. 4.12) [Nosov, 1999]. На примере плоской задачи легко могут быть продемонстрированы все основные особенности динамики сжимаемого водного слоя. Используя аналогичные подходы, несложно получить решение соответствующей трехмерной задачи в прямоугольной системе координат  $Oxyz$ . Квазитрехмерная (осесимметричная) задача подробно исследована в работе [Носов, 2000], – здесь мы на ней останавливаться не будем.

В прямоугольной системе координат  $Oxz$  решение задачи (2.60), (2.36), (4.32) будем искать в виде интегралов Лапласа и Фурье по временной и пространственной координатам соответственно

$$F(x, z, t) = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \Phi(z, p, k) \exp(pt - ikx). \quad (4.86)$$

Подставляя представление (4.86) в волновое уравнение (2.60), приходим к уравнению для определения функции  $\Phi$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \alpha^2\Phi = 0, \quad (4.87)$$

где  $\alpha^2 = k^2 + p^2 / c^2$ . Решение уравнения (4.87) хорошо известно и может быть записано в виде

$$\Phi = A \operatorname{ch}(\alpha z) + B \operatorname{sh}(\alpha z), \quad (4.88)$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные числовые коэффициенты.

Подставляя (4.88) в (4.86) и используя граничное условие на свободной поверхности (2.36), находим связь между коэффициентами  $A$  и  $B$

$$B = -A \frac{p^2}{g\alpha}. \quad (4.89)$$

Далее, при помощи формул прямого и обратного преобразования, представим пространственно-временной закона движения дна  $\eta(x, t)$  в виде интегралов Лапласа и Фурье

$$\eta(x, t) = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \Psi(p, k) \exp(pt - ikx), \quad (4.90)$$

где

$$\Psi(p, k) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \eta(x, t) \exp(-pt + ikx). \quad (4.91)$$

Подставляя представление (4.86) в левую часть граничного условия на дне (4.32), а представление (4.90) – в правую часть (4.32), находим коэффициент  $A$

$$A = - \frac{p \Psi(p, k)}{\alpha \operatorname{sh}(\alpha H) + \frac{p^2}{g} \operatorname{ch}(\alpha H)}. \quad (4.92)$$

Теперь можно записать окончательное выражение для потенциала, отвечающего произвольному пространственно-временному закону смещения дна  $\eta(x,t)$

$$F(x, z, t) = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \times$$

$$p \Psi(p, k) \left[ \frac{p^2}{g\alpha} sh(\alpha z) - ch(\alpha z) \right] \exp(pt - ikx).$$

$$\times \frac{1}{\alpha sh(\alpha H) + \frac{p^2}{g} ch(\alpha H)}$$
(4.93)

По потенциалу (4.93), с использованием формул (2.35), (2.57) и (2.58), рассчитываются следующие величины: смещение свободной поверхности, поле скорости течения и поле давления. Здесь мы ограничимся анализом поведения свободной поверхности  $\xi$ . Выпишем явную формулу для расчета этой величины

$$\xi(x, t) = \frac{1}{g} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{p^2 \exp(pt - ikx) \Psi(p, k)}{\alpha sh(\alpha H) + \frac{p^2}{g} ch(\alpha H)}.$$
(4.94)

Для расчета величины  $\xi$  по формуле (4.94) следует сначала выбрать пространственно-временной закон деформации дна и рассчитать функцию  $\Psi(p, k)$ . Остановим выбор на поршневой подвижке дна (с остаточным смещением) конечной продолжительности  $\tau$  с прямоугольным пространственным распределением амплитуды деформации

$$\eta(x, t) = \eta_0 [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \cdot [T_L(t) - T_L(t-\tau)],$$
(4.95)

где  $T_L(t)$  – временной закон для вспомогательной «линейной» подвижки, который определяется формулой (4.43). Напомним, что получив решение задачи для линейной подвижки  $\xi_L(x, t)$ , можно, пользуясь принципом суперпозиции, составить решение задачи о поршневой подвижке

$$\xi = \xi_L(t) - \xi_L(t - \tau).$$
(4.96)

Для «линейной» подвижки с прямоугольным пространственным распределением интегралы в (4.91) легко рассчитываются аналитически

$$\Psi(p, k) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{\infty} dt \int_{-a}^{+a} dx \frac{\eta_0 t}{\tau} \cdot \exp(-pt + ikx) = \frac{2\eta_0 \sin(ak)}{4\pi^2 i \tau k p^2}. \quad (4.97)$$

Подставляя (4.97) в (4.94), приходим к выражению, описывающему волновые возмущения свободной поверхности сжимаемой жидкости, инициируемые «линейной» подвижкой с прямоугольным пространственным распределением амплитуды деформации

$$\xi_L(x, t) = \frac{\eta_0}{2\pi^2 i g \tau} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(ak) \cdot \exp(pt - ikx)}{k \left( \alpha \operatorname{sh}(\alpha H) + \frac{p^2}{g} \operatorname{ch}(\alpha H) \right)}. \quad (4.98)$$

В формуле (4.98) полезно перейти к безразмерным переменным. В качестве масштаба длин вновь выберем глубину океана  $H$ . В качестве масштаба времени – время распространения акустической волны на расстояние, равное масштабу длин  $H/c$ . Приведем полный набор формул для перехода к безразмерным переменным, которые будем обозначать символом «\*»

$$k^* = kH, \quad p^* = pH/c, \quad \alpha^* = \alpha H, \quad a^* = a/H, \quad x^* = x/H, \quad (4.99)$$

$$t^* = tc/H, \quad \tau^* = \tau c/H, \quad c^* = c/\sqrt{gH}, \quad \xi^* = \xi/\eta_0.$$

В безразмерных переменных интеграл (4.98) принимает следующий вид:

$$\xi_L^*(x^*, t^*) = \frac{c^{*2}}{2\pi^2 i \tau^*} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp^* \int_{-\infty}^{\infty} dk^* \times$$

$$\times \frac{\sin(a^* k^*) \cdot \exp(p^* t^* - ik^* x^*)}{k^* \left( \alpha^* \operatorname{sh}(\alpha^*) + p^{*2} c^{*2} \operatorname{ch}(\alpha^*) \right)}. \quad (4.100)$$

На плоскости  $\{\operatorname{Re}(p^*), \operatorname{Im}(p^*)\}$  подынтегральная функция в (4.100) обладает набором полюсов, расположенных на мнимой оси

$\text{Re}(p) = 0$ . Положение полюсов определяется из решения уравнения

$$\alpha^* \text{sh}(\alpha^*) + p^{*2} c^{*2} \text{ch}(\alpha^*) = 0, \quad (4.101)$$

где  $\alpha^{*2} = k^{*2} + p^{*2}$ . Величины  $k^*$  и  $c^*$  являются действительными. Комплексной является только величина  $p^*$ . Уравнение (4.101) имеет решения только в случае  $p^* = i\omega^*$ , где  $\omega^*$  – действительная величина. Перепишем уравнение (4.101) с учетом введенного обозначения

$$\text{th}(\sqrt{k^{*2} - \omega^{*2}}) = \frac{\omega^{*2} c^{*2}}{\sqrt{k^{*2} - \omega^{*2}}}. \quad (4.102)$$

Заметим, что величины  $k^*$  и  $\omega^*$  могут принимать любые значения, поэтому следует рассмотреть отдельно два случая: (1)  $k^* > \omega^*$  и (2)  $k^* < \omega^*$ .

*В первом случае* под корнем будет положительная величина, и никаких дополнительных преобразований формулы (4.102) не требуется. Уравнение (4.102) является трансцендентным, его решение может быть найдено численными методами. Решение уравнения (4.102) определяет пару полюсов  $\pm i\omega_0^*$ , с которыми связана мода гравитационных волн, распространяющихся в сжимаемом водном слое.

*Во втором случае* (при  $k^* < \omega^*$ ) уравнение (4.102) преобразуется к следующему виду:

$$\text{tg}(\sqrt{\omega^{*2} - k^{*2}}) = \frac{\omega^{*2} c^{*2}}{\sqrt{\omega^{*2} - k^{*2}}}. \quad (4.103)$$

Уравнение (4.103) также является трансцендентным, его решение определяет набор полюсов  $\pm i\omega_n^*$  (где  $n=1, 2, 3, \dots$ ), с которыми связаны упругие колебания жидкого слоя.

В принципе для вычисления интеграла по  $dp$  в формуле (4.100) можно использовать теорию вычетов. Но в данном случае этот способ не обеспечивает очевидного вычислительного преимущества перед прямым численным интегрированием. Дело здесь не только в трансцендентном характере уравнений (4.102) и

(4.103), но и во множественности полюсов. Поэтому двойной интеграл в (4.100) будем рассчитывать численно.

Заметим, что действительная часть подынтегральной функции в (4.100) является четной по отношению к переменной  $k$ , а мнимая – нечетной. В этой связи мнимая часть интеграла обращается в ноль, а интегрирование по  $k$  можно вести не от  $-\infty$  до  $\infty$ , а от  $0$  до  $\infty$ , удвоив при этом значение подынтегральной функции.

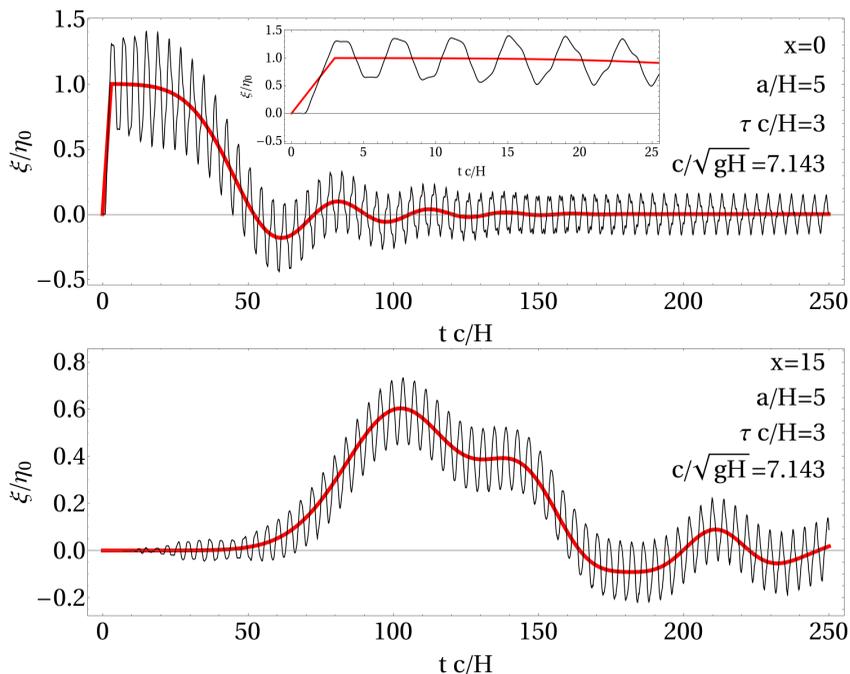


Рис. 4.21. Временные развертки смещения свободной поверхности сжимаемой (тонкая линия) и несжимаемой (толстая линия) жидкости, образующегося при поршневой подвижке конечной продолжительности. Параметры расчета указаны на рисунке

Для расчета динамики поведения свободной поверхности выберем реалистичные значения параметров задачи. Пусть водный слой имеет глубину  $H = 4500$  м. Скорость акустических волн положим равной  $c = 1500$  м/с. Ширину источника выберем равной 10 глубинам океана ( $a/H = 5$ ). Для длительности поршневой

подвижки  $\tau$  выберем два значения: 9 с и 45 с. Это соответствует безразмерной продолжительности  $\tau^*$ : 3 и 15. Безразмерная скорость составит  $c^* \approx 7.143$  (расчет выполнен при  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ).

Динамику смещения свободной поверхности в данном случае удобно представить в форме временных разверток, рассчитанных в фиксированных точках. Выберем две такие точки:  $x^* = 0$  (центр источника) и  $x^* = 15$  (вне источника – на расстоянии  $10H$  от его границы).

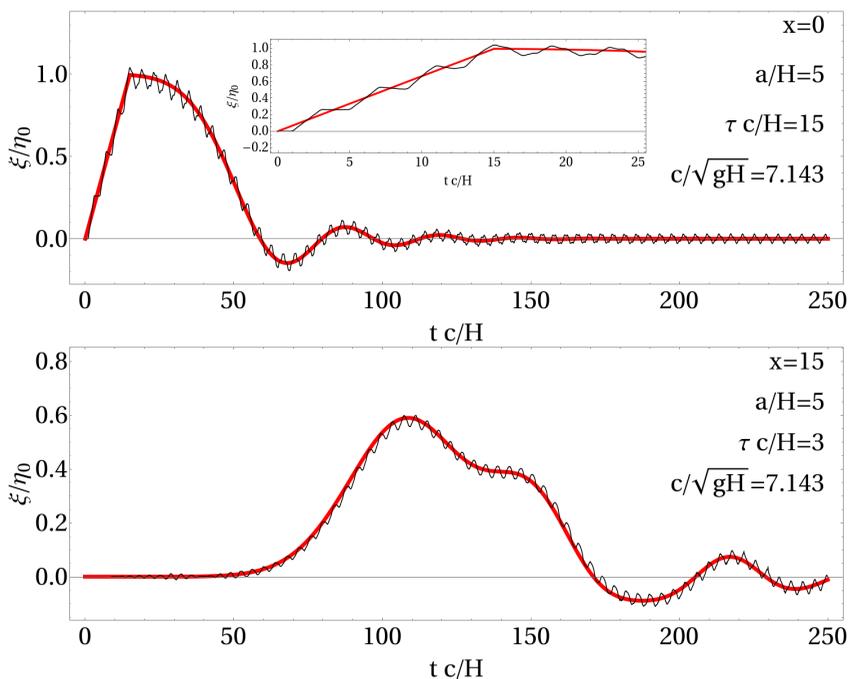


Рис. 4.22. Обозначения идентичны Рис. 4.21

Примеры расчетов, выполненных по формуле (4.96) и (4.100), представлены на Рис. 4.21 и 4.22 тонкими черными кривыми. Для сравнения толстой линией показано движение свободной поверхности, рассчитанное в рамках потенциальной теории несжимаемой жидкости по формулам (4.70) и (4.73). Видно, что в центре источника поверхность несжимаемой жидкости приходит в движение сразу после начала подвижки. При учете сжимаемости

движение начинается с запаздыванием на время распространения акустической волны от дна до поверхности ( $H/c$ ). Вне источника, в точке  $x^* = 15$ , вначале также вступает акустический сигнал (с задержкой  $10H/c$ ), и заметно позже вступает гравитационная волна. Задержки во временах вступления отличаются примерно в  $c^*$  раз.

При короткой подвижке ( $\tau^* = 3$ ) различия в сигналах, рассчитанных с учетом и без учета сжимаемости, довольно существенные. Видно, что в сжимаемом водном слое помимо гравитационной волны возникают «быстрые» осцилляции с доминирующим периодом  $4H/c$ , который соответствует критическому периоду акустических волн или периоду отсечки (3.98). Амплитуда упругих колебаний водной поверхности сопоставима с амплитудой гравитационной волны.

Увеличение продолжительности подвижки ( $\tau^* = 15$ ) приводит к заметному уменьшению амплитуды упругих колебаний. Разница между кривыми становится малосущественной.

Несложно заметить, что быстрые (акустические) колебания водной поверхности происходят на фоне медленно развивающейся гравитационной волны. Можно предположить, что гравитационные и акустические волны существуют независимо. И это действительно так. Дело в том, что акустические и гравитационные волны, образуемые в водном слое колебаниями дна существуют в различных частотных диапазонах. Докажем это утверждение.

Напомним, что частота гидроакустических волн, которые могут распространяться в водном слое, ограничена снизу частотой отсечки (см. раздел 3.3)

$$f_{ac} = c/4H. \quad (4.104)$$

Теперь определим предельную частоту для гравитационных волн, возбуждаемых малыми динамическими деформациями дна. Из аналитического решения задачи (4.76) следует, что пространственный спектр этих волн всегда промодулирован быстро затухающей функцией

$$\chi(k) = \frac{1}{ch(kH)}. \quad (4.105)$$

Результатом такой модуляции является экспоненциально быстрое уменьшение амплитуды волн, возбуждаемых движениями дна, с ростом волнового числа  $k$  (или с уменьшением длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ ). Таким образом длины гравитационных волн, возбуждаемых в водном слое движениями дна либо иными придонными процессами, оказываются ограниченными снизу величиной  $\lambda_{\min} \sim H$ .

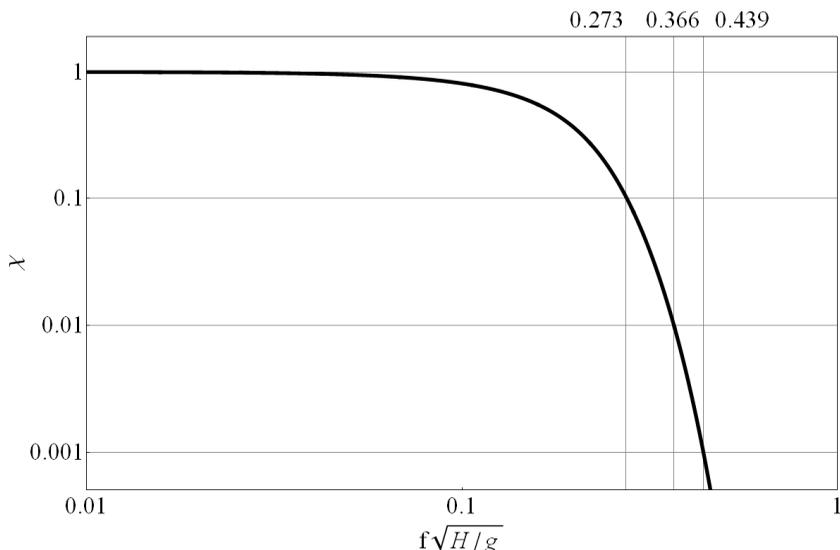


Рис. 4.23. Величина  $\chi(k) = 1/\text{ch}(kH)$ , определяющая амплитуду гравитационных волн, возбуждаемых в слое жидкости глубины  $H$  колебаниями дна, как функция частоты этих колебаний  $f$

В линейных гравитационных волнах волновое число  $k$  однозначно связано с циклической частотой  $\omega$  ( $\omega = 2\pi f$ ) дисперсионным соотношением:  $\omega^2 = gk \tanh(kH)$ . Используя дисперсионное соотношение, представим функцию  $\chi(k)$  в форме частотной зависимости  $\chi(f)$ . На Рис. 4.23 величина  $\chi$  построена как функция безразмерной частоты  $f\sqrt{H/g}$ . Из рисунка видно,

что при малых частотах величина  $\chi$  близка к 1. С ростом частоты величина  $\chi$  резко уменьшается.

В силу того, что величина  $\chi$  определяет амплитуду гравитационных волн, создаваемых движениями дна, анализ зависимости, изображенной на Рис. 4.23, позволяет сделать следующие выводы. Гравитационные волны могут образовываться при колебаниях дна только с достаточно низкими частотами:  $f < f_g$ , где  $f_g = \alpha\sqrt{g/H}$  – критическая частота, при превышении которой амплитуда волн становится пренебрежимо малой,  $\alpha$  – числовой коэффициент. Для однозначного определения коэффициента  $\alpha$  необходимо задать уровень ослабления амплитуды поверхностных волн по сравнению с амплитудой колебаний дна. Десятикратному ослаблению амплитуды волны по сравнению с амплитудой колебаний дна соответствует величина коэффициента  $\alpha_{10} \approx 0.273$ , стократному –  $\alpha_{100} \approx 0.366$ , тысячекратному –  $\alpha_{1000} \approx 0.439$ . В силу того, что функция  $\chi$  падает достаточно резко, коэффициенты, соответствующие различным уровням ослабления, не сильно отличаются друг от друга. В дальнейшем, для определенности, мы будем использовать значение коэффициента  $\alpha_{100}$ .

Проведенные выше рассуждения позволяют ввести критическую частоту для гравитационных волн:

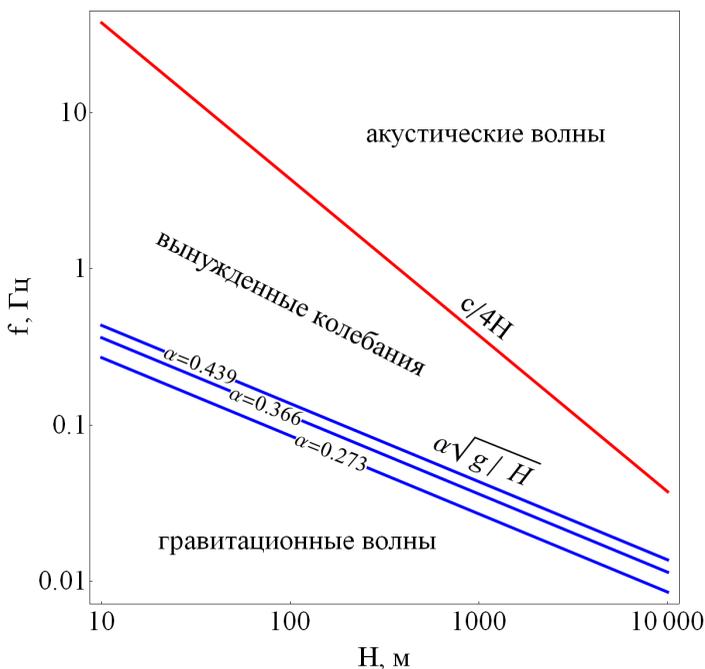
$$f_g \approx \alpha\sqrt{g/H}, \quad (4.106)$$

Зависимости (1) и (3) представлены на Рис. 4.24. Из рисунка видно, что кривые, соответствующие критическим частотам  $f_g$  и  $f_{ac}$  в условиях нашей планеты никогда не пересекаются (всегда имеет силу неравенство  $f_g < f_{ac}$ ). Следовательно, гравитационные и гидроакустические волны, возбуждаемые сейсмическими движениями дна, всегда приурочены к различным (непересекающимся) частотным диапазонам.

Весьма интересным является промежуточный частотный диапазон  $f_g < f < f_{ac}$ . Это диапазон «вынужденных колебаний». Если частота колебаний дна лежит в диапазоне «вынужденные колебания», то ни гравитационные, ни гидроакустические волны

не возникают, и водный слой как единое целое следует за движениями дна. В режиме вынужденных колебаний, в случае ровного горизонтального дна, вариации придонного давления  $p$  связаны с вертикальной компонентой ускорения движения дна  $a$  вторым законом Ньютона

$$p = \rho H a . \quad (4.107)$$



*Рис. 4.24. Критические частоты для гравитационных и акустических волн в водном слое в зависимости от глубины  $H$ . Частотные диапазоны, соответствующие характеру линейного отклика водного слоя на колебания дна с частотой  $f$ : «гравитационные волны», «вынужденные колебания» и «акустические волны»*

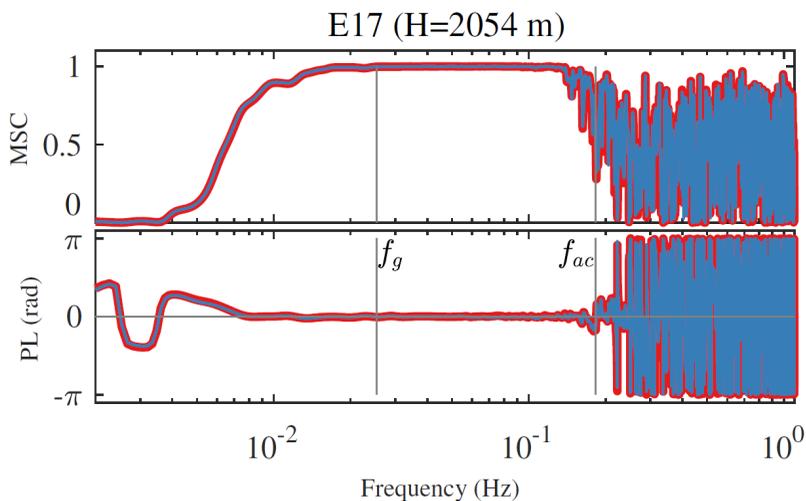


Рис. 4.25. Кросспектр вариаций придонного давления и вертикального ускорения, зарегистрированных во время землетрясения 11 марта 2011 г. Фрагмент рисунка из статьи [Nosov et al., 2018]

Отметим, что существование связи (4.107) в диапазоне вынужденных колебаний находит подтверждение при анализе натуральных данных [Nosov et al., 2018]. В отмеченной работе методом кросспектрального анализа были сопоставлены вариации давления и вертикальные ускорения, измеренные донными обсерваториями DONET во время катастрофического землетрясения у побережья Японии 11 марта 2011 г. Кросспектр для одной из станций представлен на Рис. 4.25. Из рисунка видно, что в диапазоне «вынужденные колебания», т.е. между частотами  $f_g$  и  $f_{ac}$ , квадрат когерентности (MSC – magnitude-squared coherence) в точности равен 1, а сдвиг фаз (PL – phase lag) равен 0. Это говорит о пропорциональности вариаций придонного давления и вертикального ускорения движений дна в означенном частотном диапазоне. Вне этого диапазона такой пропорциональности не наблюдается.

## **Глава 5**

### **СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ**

Волны цунами и сопутствующие явления в общем случае представляют собой нестационарные процессы. Но в теории цунами существуют несколько задач, в которых зависимость процесса от времени оказывается несущественной и может быть исключена из рассмотрения. В этой главе мы остановимся на двух таких задачах. Первая задача – расчет начального возвышения водной поверхности в очаге цунами – имеет важное практическое значение для постановки начальных условий при численном моделировании цунами. Вторая задача – задача об остаточных гидродинамических полях – дополняет теоретические представления о генерации цунами косейсмическими деформациями дна с учетом вращения Земли и плотностной стратификации океана.

#### **5.1. Начальное возвышение в очаге цунами**

Численные модели волн цунами, применяемые в практических расчетах, как правило, строятся на основе теории длинных волн (мелкой воды), которая оперирует уравнениями гидродинамики, осредненными вдоль вертикальной координаты (см. раздел 2.2). При этом процесс формирования цунами подводным землетрясением рассматривается как мгновенный. Поэтому система уравнений теории длинных волн решается с начальными условиями, представляющими собой некоторое смещение свободной поверхности воды от равновесного положения (начальное возвышение) при нулевом поле скорости течения.

В качестве «нулевого приближения» начальное возвышение можно полагать равным вертикальной компоненте косейсмической (остаточной) деформации дна океана, которая

образовалась в результате подводного землетрясения. Такой способ постановки начальных условий – назовем его традиционным – нашел широкое применение в численном моделировании реальных событий [e.g. Titov et al., 2003; Alasset et al., 2006; Zaytsev et al., 2010; Popinet, 2012]. Распространенность традиционного способа обусловлена тем, что он достаточно адекватно воспроизводит основной механизм генерации цунами – вытеснение воды косейсмической деформацией дна. Вместе с тем, традиционный способ постановки начальных условий далек от совершенства. Дело в том, что в момент окончания деформации дна отклонение водной поверхности от равновесного положения и вертикальная остаточная деформация не будут равными даже в случае ровного горизонтального дна и мгновенной подвижки, – так проявляется «сглаживающий эффект» водного слоя. Кроме того, при наклонном дне горизонтальные компоненты деформации также приводят к вытеснению воды и, следовательно, вносят вклад в начальное возвышение.

Физически существование «сглаживающего эффекта» следует из конечной толщины водного слоя. Напомним, что в теории мелкой воды водный слой полагается бесконечно тонким по сравнению с длиной волны. Математически существование «сглаживающего эффекта» объясняется следующим образом. Из аналитического решения задачи о генерации цунами в бассейне постоянной глубины малыми вертикальными деформациями дна (см. формулу (4.77)) следует, что пространственный спектр смещения водной поверхности промодулирован быстро затухающей функцией  $1/ch(kH)$ , где  $k$  – волновое число. Следовательно, движения дна не могут создать на поверхности возмущения с длиной волны  $\lambda < H$ . Поэтому прямой перенос деформаций дна на водную поверхность приводит к искусственному насыщению спектра цунами коротковолновыми компонентами, которые не существуют в реальности. В численных моделях для адекватного воспроизведения этих несуществующих коротковолновых компонент требуется нерациональное уменьшение шагов по пространству и времени, что приводит к увеличению времени счета. Таким образом, учет сглаживающего эффекта не только позволяет избежать ошибок в расчете

начального возвышения, но и способствует повышению эффективности численных моделей.

Идея о сглаживающем влиянии водного слоя впервые была высказана Каджиурой еще до эпохи численного моделирования цунами [Kajiura, 1963]. Те или иные варианты сглаживания начального возвышения использовались при численном моделировании цунами или анализировались теоретически различными научными группами [Tinti et al., 1999; Tanioka, Seno, 2001; Rabinovich et al., 2008; Saito, Furumura, 2009; Носов, Колесов, 2009; Nosov, Kolesov 2011; Файн, Куликов, 2011; Носов, Семенов, 2014]. Вкладу горизонтальных деформаций наклонного дна в волну цунами также посвящен целый ряд исследований [Iwasaki, 1982; Tanioka, Satake, 1996; Nosov et al., 2014; Большакова и др., 2015].

До конца 20-го века очаг землетрясения в большинстве случаев представлялся упрощенно как прямоугольная площадка разрыва с однородным распределением подвижки. Такое упрощенное представление позволяло получить приближенную оценку деформации дна в очаге цунами, но о точных расчетах речь не шла. В последнее десятилетие произошел прорыв в отношении восстановления структуры подвижки в очаге землетрясения. Геологическая служба США (USGS) определяет структуру подвижки (Finite Fault) практически для каждого сильного землетрясения. Кроме того, независимо от USGS, создана база данных, которая к настоящему времени содержит оценки распределения подвижки для сотен сейсмических событий [Mai, Thingbaijam, 2014].

Детальные данные о структуре подвижки уже позволяют претендовать на точный расчет векторного поля деформации дна в источнике цунами. В связи с этим учет вклада горизонтальных деформаций и сглаживающего эффекта на настоящем этапе становится насущной необходимостью. Пренебрежение этими факторами будет неизменно ограничивать точность численного воспроизведения цунами.

Далее мы рассмотрим модифицированный способ постановки начальных условий, который, при сохранении предположения о мгновенности деформации дна, учитывает не только

вертикальные, но и горизонтальные деформации неровного дна, а также «сглаживающий эффект» водного слоя.

Постановка задачи представлена на Рис. 2.1. Мы будем рассматривать однородный несжимаемый водный слой переменной глубины  $H$ . Начало прямоугольной системы координат  $Oxyz$  расположим на невозмущенной свободной поверхности воды. Ось  $Oz$  направим вертикально вверх, оси  $Ox$  и  $Oy$  – горизонтально. До землетрясения положение дна определяется формулой  $z_b = -H(x, y)$ . После землетрясения дно перемещается в новое положение  $z_b = -H(x, y) + \eta(x, y)$ , где  $\eta(x, y)$  – остаточное смещение поверхности дна ( $|\eta| \ll H$ ).

Для определения связи между векторным полем деформации дна  $\mathbf{D} \equiv (D_x, D_y, D_z)$  и функцией  $\eta(x, y)$  рассмотрим некоторую точку, расположенную на невозмущенной поверхности дна  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . После землетрясения в результате косейсмической деформации точка перемещается в новое положение  $P_1 = (x_0 + D_x, y_0 + D_y, z_0 + D_z)$ , продолжая при этом оставаться на поверхности дна. Теперь координаты этой точки удовлетворяют уравнению

$$z_0 + D_z = -H(x_0 + D_x, y_0 + D_y) + \eta(x_0 + D_x, y_0 + D_y).$$

Входящие в это уравнение функции  $H(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  в практике численного моделирования цунами представляются дискретно на некоторой сетке с определенным пространственным шагом. Это означает, что структура этих функций между ближайшими точками сетки остается за пределами рассмотрения. Разумно предположить, что между узловыми точками функции  $H(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  являются достаточно гладкими, например, линейными, – в противном случае следовало бы признать неверным выбор шага сетки. Шаг сетки обычно составляет  $\Delta \sim 10^3$  м. Амплитуда косейсмической деформации дна существенно уступает этой величине:  $|\mathbf{D}| \ll \Delta$ . Следовательно, функцию  $H(x, y)$  можно разложить в ряд Тейлора в точке  $(x_0, y_0)$ , удерживая в разложении только линейные члены:

$$H(x_0 + D_x, y_0 + D_y) \approx H(x_0, y_0) + \partial H / \partial x \cdot D_x + \partial H / \partial y \cdot D_y.$$

Для функции  $\eta(x, y)$  целесообразно сделать еще более простое предположение:  $\eta(x_0 + D_x, y_0 + D_y) \approx \eta(x_0, y_0)$ . В итоге приходим к формуле, которая связывает остаточное смещение поверхности дна с векторным полем деформации дна и распределением глубин [Nosov et al., 2014]

$$\eta = \frac{\partial H}{\partial x} D_x + \frac{\partial H}{\partial y} D_y + D_z. \quad (5.1)$$

Аналогичная формула была получена ранее в работе [Tanioka, Satake, 1996] на основе рассуждений наглядно-физического характера.

В принципе, расчет начального возвышения возможен из решения трехмерной задачи о гравитационных волнах в жидкости с учетом всех трех компонент вектора деформации дна и распределения глубин в районе источника. Эта задача может быть рассмотрена в рамках линейной потенциальной теории (см. раздел 2.3) в следующей постановке:

$$\Delta F = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -g \frac{\partial F}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{v}_b, \mathbf{n}), \quad z = -H(x, y), \quad (5.4)$$

где  $F$  – потенциал скорости течения,  $\mathbf{v}_b$  – вектор скорости движения дна,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности дна. Искомое начальное возвышение рассчитывается через потенциал по формуле:

$$\xi(x, y, \tau) = - \frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(x, y, 0, \tau)},$$

где  $\tau$  – продолжительность деформации дна.

В том случае, когда деформацию дна можно считать мгновенной, динамическая задача (5.2)-(5.4) легко сводится к более простой – статической [Nosov, Kolesov, 2011]. Интегрируя уравнения (5.2)-(5.4) по времени от 0 до  $\tau$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (5.5)$$

$$\Phi = 0, \quad z = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{D}, \mathbf{n}), \quad z = -H(x, y), \quad (5.7)$$

$$\Phi \equiv \int_0^{\tau} F dt, \quad \mathbf{D} \equiv \int_0^{\tau} \mathbf{v}_b dt,$$

где  $\Phi$  – потенциал смещений. Искомое начальное возвышение рассчитывается по потенциалу смещений следующим образом:

$$\xi_0 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.5) и граничное условие на дне (5.7) представляют собой прямые и очевидные следствия уравнений (5.2) и (5.4). Граничное условие на поверхности (5.6) выводится из формулы (5.3), если принять предположение о скоротечности процесса деформации дна. Для получения формулы (5.6) мы выберем в качестве пространственного и временного масштабов глубину океана  $H$  и продолжительность подвижки  $\tau$ , после чего перейдем в выражении (5.3) к безразмерным переменным  $t^* = t/\tau$  и  $z^* = z/H$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^{*2}} = -\frac{g \tau^2}{H} \frac{\partial F}{\partial z^*}. \quad (5.9)$$

В случае мгновенной подвижки  $\tau = 0$  правая часть выражения (5.9) обращается в ноль. Учитывая нулевое начальное условие

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -g\xi(x, y, 0) \equiv 0,$$

дважды проинтегрируем по времени формулу (5.3) с нулевой правой частью. В итоге приходим к выражению  $F = C$ , где  $C$  – константа интегрирования. В соответствии с определением потенциала смещений, его величина на поверхности  $z = 0$  принимает значение  $\Phi = C \cdot \tau$ . Искомое начальное возвышение определяется как производная по вертикальной координате от потенциала  $\Phi$ . Следовательно, потенциал смещений может быть переопределен (путем вычитания константы  $C \cdot \tau$ , которая не зависит от координаты  $z$ ) с тем, чтобы на поверхности он принимал нулевые значения:  $\Phi = 0$ .

Обычно для обоснования того, что процесс генерации цунами землетрясением является мгновенным, используют условие  $\tau \ll R/\sqrt{gH}$ , где  $R$  – горизонтальный размер источника цунами. Это условие всегда выполняется достаточно хорошо. Но из формулы (5.9) видно, что на самом деле «условие мгновенности» должно быть иным – более жестким:  $\tau \ll \sqrt{H/g}$ . И даже если под величиной  $\tau$  понимать не продолжительность вспарывания разрыва в очаге землетрясения, а существенно меньшую величину – время деформации дна в заданной точке, то и в этом случае «условие мгновенности»  $\tau \ll \sqrt{H/g}$  часто будет нарушено. В этой связи решение задачи (5.5)-(5.7) следует рассматривать как очередное приближение, являющееся, несомненно, более точным, чем традиционный перенос деформаций дна на поверхность воды, но все же уступающее в точности решению полной динамической задачи (5.2)-(5.4).

Для определения начального возвышения в реальном очаге цунами задача (5.5)-(5.7) может быть решена численными методами. Численный расчет всегда выполняется в ограниченной области пространства. Поэтому требуется сформулировать граничные условия на внешней границе расчетной области, которая проходит по океану. Внешнюю границу, очевидно, следует выбирать на таком удалении от источника цунами, где смещением свободной поверхности, а также деформацией дна можно пренебречь. В этом случае на внешней границе расчетной области можно поставить простое в реализации граничное условие Дирихле:  $\Phi = 0$ .

Для тестирования численных моделей могут оказаться полезными аналитические решения задачи (5.5)-(5.7) на плоском горизонтальном и плоском наклонном дне, о которых речь пойдет ниже.

Для бассейна с плоским *горизонтальным* дном ( $H = const$ ) и деформации дна прямоугольной формы с размерами  $2a \times 2b$  и амплитудой  $\eta_0$

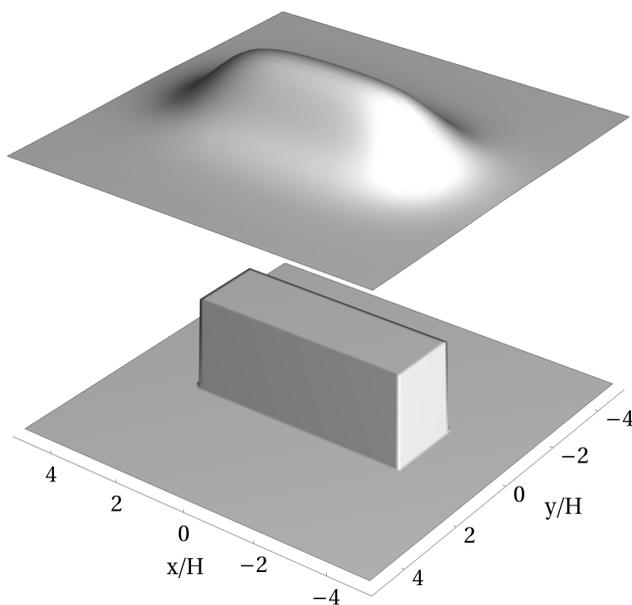
$$\eta(x,y) = \eta_0 [\theta(x+a) - \theta(x-a)] [\theta(y+b) - \theta(y-b)], \quad (5.10)$$

где  $\theta$  – ступенчатая функция Хевисайда, задача (5.5)-(5.7) имеет следующее аналитическое решение [Nosov, Kolesov, 2011]:

$$\xi(x, y) = \frac{4\eta_0}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dm \int_0^{+\infty} dn \frac{\cos(mx) \cos(ny) \sin(ma) \sin(nb)}{m n \operatorname{ch}(kH)}, \quad (5.11)$$

$$k^2 = m^2 + n^2,$$

где  $m$  и  $n$  – компоненты вектора  $\mathbf{k}$ . Интеграл в формуле (5.11) легко рассчитывается численно. Подынтегральная функция быстро убывает с ростом величин  $m$  и  $n$ , поэтому интегрирование можно проводить в конечных пределах.



*Рис. 5.1. Возмущение водной поверхности, сформированное мгновенной деформацией дна прямоугольной формы. Расчет выполнен по формуле (5.11) при  $a = 3H$ ,  $b = H$*

Пример расчета начального возвышения по формуле (5.11) представлен на Рис. 5.1. Видно, что по сравнению с деформацией дна, обладающей прямоугольной формой, возвышение поверхности является существенно более гладким. При этом объем воды, вытесненный деформацией дна, равен объему, заключенному в начальном возвышении.

Решение эквивалентной двумерной задачи в плоскости  $Oxz$  имеет следующий вид (аналог формулы (5.11)):

$$\xi(x) = \frac{2\eta_0}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \frac{\cos(kx)\sin(ka)}{k \operatorname{ch}(kH)}. \quad (5.12)$$

Формула (5.12) описывает смещение свободной поверхности, вызванное деформацией дна с прямоугольным пространственным распределением  $\eta(x) = \eta_0[\theta(x+a) - \theta(x-a)]$  в бассейне с плоским горизонтальным дном.

Для решения двумерной задачи в бассейне с плоским *наклонным* дном (см. Рис. 5.2) используем цилиндрические координаты, в которых уравнения (5.5)-(5.8) принимают вид

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (5.13)$$

$$\Phi = 0, \quad \text{при } \varphi = 0, \quad (5.14)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (\mathbf{D}, \mathbf{n}), \quad \text{при } \varphi = -\alpha, \quad (5.15)$$

$$\xi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad \text{при } \varphi = 0, \quad (5.16)$$

где  $\alpha$  – угол наклона дна,  $\mathbf{n} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$  – нормаль к поверхности дна.

Как и в случае горизонтального дна зададим прямоугольное пространственное распределение остаточных деформаций. Для источника такого типа правая часть формулы (5.15) имеет вид

$$(\mathbf{D}, \mathbf{n}) = \eta_S [\theta(r - R_1) - \theta(r - R_2)], \quad (5.17)$$

где  $\eta_S$  – амплитуда деформации в направлении, перпендикулярном его поверхности,  $R_1$  и  $R_2$  – положение левой и правой границ источника.

Введем безразмерную пространственную переменную  $r^* = r/L$ , где  $L$  – некоторый масштаб длины. Структура уравнения (5.13) такова, что переход к безразмерной переменной не меняет вида уравнения

$$r^{*2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^{*2}} + r^* \frac{\partial \Phi}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

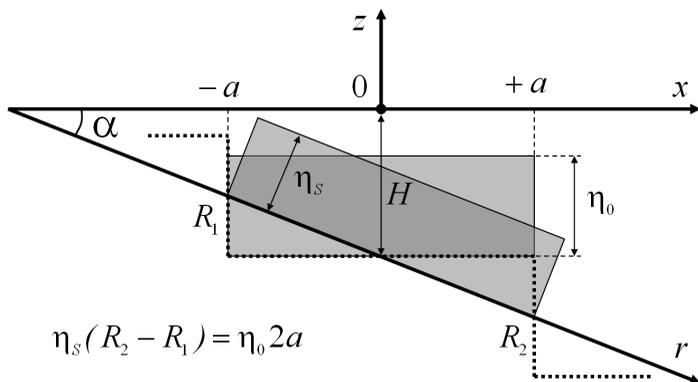


Рис. 5.2. Постановка двумерной задачи на наклонном дне. Эквивалентность источников на наклонном и горизонтальном дне

Граничное условие на поверхности (5.14) также, очевидно, остается без изменения. В результате перехода к безразмерной переменной меняют свою форму только выражения (5.15) и (5.16). Правая часть граничного условия на дне, описывающая источник, теперь оказывается помноженной на величину  $L$ :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = L \cdot (\mathbf{D}, \mathbf{n}), \quad \text{при } \varphi = -\alpha.$$

В то время как искомое смещение свободной поверхности теперь требуется разделить на величину  $L$ :

$$\xi(r) = \frac{1}{L \cdot r^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad \text{при } \varphi = 0.$$

Очевидно, что эти два взаимокомпенсирующие действия (умножение и деление на величину  $L$ ) можно вообще не производить.

Итак, интересной особенностью рассматриваемой задачи является тот факт, что переход к безразмерной переменной  $r^*$  не

меняет вида уравнений. В дальнейшем для удобства и определенности будем полагать  $L = 1 \text{ м}$ .

Далее мы будем рассматривать уравнения (5.13)-(5.16), полагая, что они записаны в безразмерных координатах ( $r$ ,  $R_1$  и  $R_2$  – безразмерные величины). Знак «\*» здесь и далее мы опустим.

Аналитическое решение задачи (5.13)-(5.15) строится методом разделения переменных. Итоговая формула, описывающая начальное возвышение, образуемое на поверхности воды в бассейне с плоским наклонным дном при деформации дна прямоугольной формы (5.11), имеет следующий вид [Носов, Семенцов, 2014]:

$$\xi(r) = \frac{\eta_S}{\pi r} \int_0^{+\infty} \frac{R_2 \cos q\delta_2 - R_1 \cos q\delta_1 - qR_2 \sin q\delta_2 + qR_1 \sin q\delta_1}{(1 + q^2)ch(q\alpha)} dq, \quad (5.18)$$

где  $\delta_1 = \ln(r/R_1)$ ,  $\delta_2 = \ln(r/R_2)$ . Интеграл (5.18) может быть легко рассчитан численно. Благодаря экспоненциально быстрому затуханию подынтегральной функции, численное интегрирование можно выполнять до конечного предела.

Примеры расчета форм начальных возвышений, создаваемых на поверхности воды источниками на наклонном дне (сплошные линии) и эквивалентными источниками на горизонтальном дне (пунктирные линии) представлены на Рис. 5.3. Расчет выполнен при  $tg\alpha = 0.3$  для двух глубин в центре источника: 500 м и 2000 м. Серые прямоугольники показывают местоположение источников. Размер источника (полуширина  $a = 1000 \text{ м}$ ) приблизительно соответствует типичному шагу сетки при численном моделировании цунами (1 угл.мин.). Под эквивалентными источниками на наклонном и горизонтальном дне мы понимаем источники с прямоугольным пространственным распределением остаточной деформации, глубина в центре которых одинакова и параметры которых связаны соотношениями:  $2a = (R_2 - R_1)\cos\alpha$  и  $\eta_S = \eta_0 \cos\alpha$ . Заметим, что эти соотношения отвечают физически разумному требованию о равенстве вытесненных объемов.

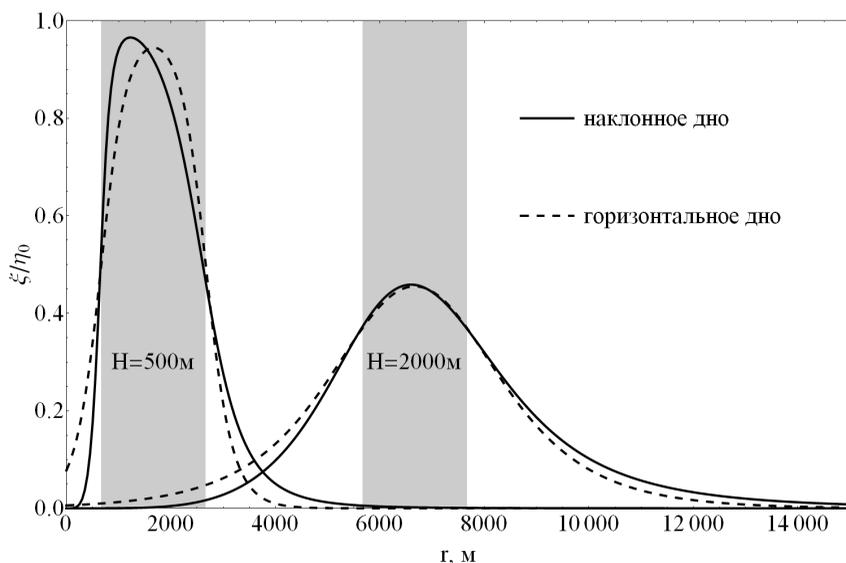
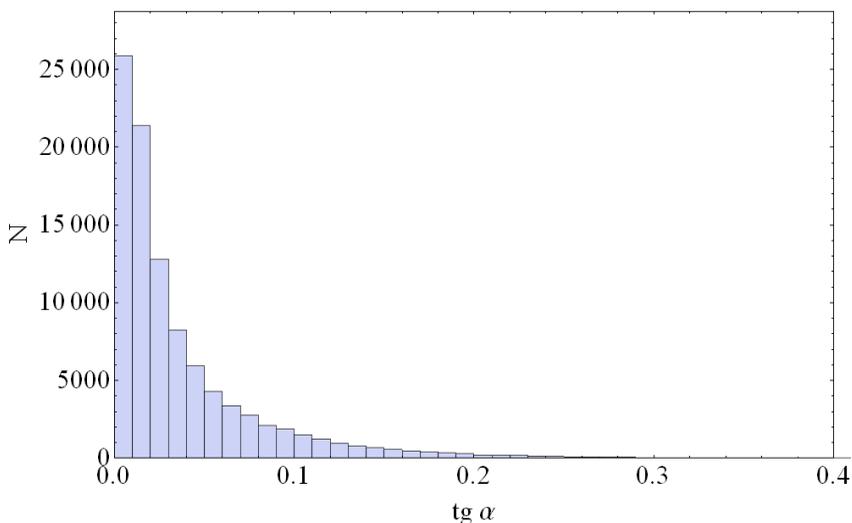


Рис. 5.3. Начальные возвышения, создаваемые на поверхности воды источником на наклонном дне (сплошная линия) и эквивалентным источником на горизонтальном дне (пунктирная линия). Расчет выполнен по формулам (5.12) и (5.18) при  $a=1000$  м,  $\operatorname{tg}\alpha=0.3$  для двух источников, расположенных на глубинах  $H=500$  м и  $H=2000$  м. Положение источников показано серыми прямоугольниками

Из Рис. 5.3 видно, что во всех случаях начальные возвышения, создаваемые прямоугольной деформацией дна, имеют гладкую форму. Чем больше глубина в области источника, тем более плавным становится начальное возвышение. Если расчет ведется по модели горизонтального дна, то начальное возвышение является симметричным относительно центра источника. Для модели наклонного дна начальное возвышение всегда асимметрично. В той области, где глубина меньше (слева) происходит более резкий спад кривой, по сравнению с глубоководной областью. При небольших глубинах источника разница между моделями наклонного и горизонтального дна хорошо заметна. При увеличении глубины источника разница становится менее существенной.



*Рис. 5.4. Распределение уклонов дна в области очага цунами Тохоку 2011. Расчет выполнен для области 140-145 E, 35-42 N по данным цифрового атласа GEBCO*

Очевидно, что максимальное расхождение между моделями горизонтального и наклонного дна должно наблюдаться при больших уклонах дна. Поэтому выбор максимального значения  $tg\alpha$  нуждается в обосновании. На Рис. 5.4 представлен пример распределения уклонов дна в области источника цунами Тохоку 2011. Уклон дна рассчитывался по данным цифрового атласа GEBCO (<http://www.gebco.net/>) с шагом 1 угл.мин. как абсолютная величина градиента глубины ( $tg\alpha = |\text{grad } H|$ ). Обрабатывались только те точки, глубина в которых превышала 10 м. Из Рис. 5.4 видно, что уклоны дна, как правило, ограничены величиной 0.2, и только в крайне редких случаях они достигают величины 0.3.

Таким образом, примеры расчетов, представленные на Рис 5.3, соответствуют максимально крутому склону. Видно, что даже в этом случае различие между моделями горизонтального и

наклонного дна не является критическим. Следовательно, расчет начального возвышения в реальных очагах цунами может быть основан на использовании аналитического решения трехмерной задачи на плоском горизонтальном дне. Такой подход (аналитико-численный алгоритм) был предложен в работах [Nosov, Kolesov, 2011; Носов, Семенцов, 2014], и он представляет собой возможную альтернативу прямому численному решению задачи (5.2)-(5.4).

Аналитико-численный алгоритм (АЧА) основан на использовании формулы (5.11) и принципа суперпозиции. Состоит АЧА в следующем:

1) область источника цунами в бассейне переменной глубины разбивается на одинаковые прямоугольные подобласти фиксированного размера  $2a \times 2b$  ;

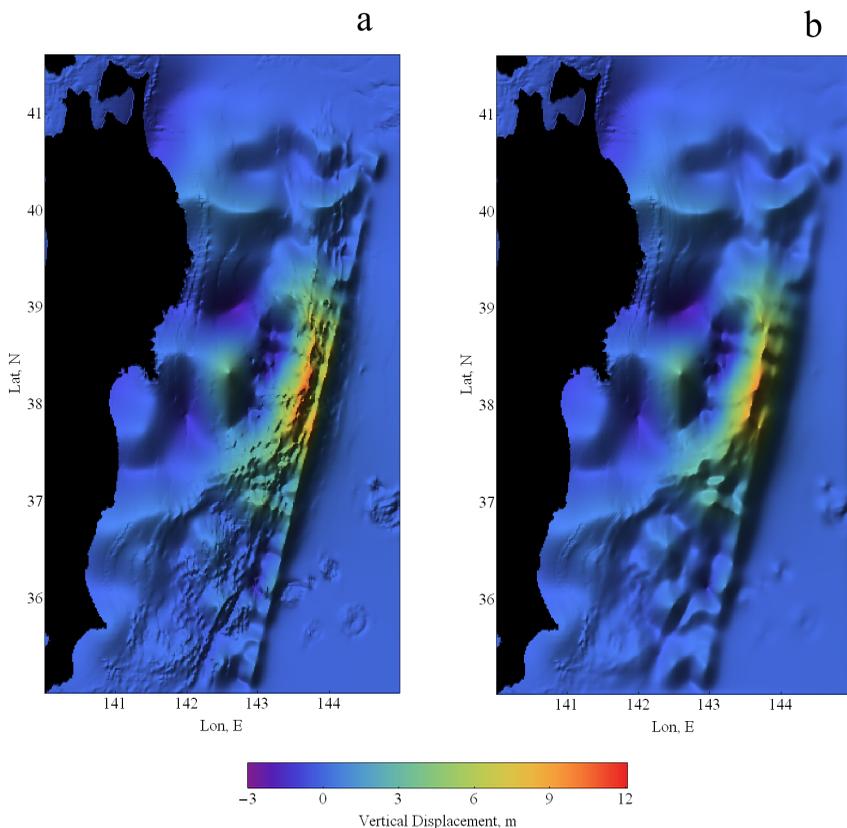
2) каждая подобласть рассматривается как независимый элементарный источник, характеризуемый определенными глубиной  $H$  и амплитудой смещения поверхности дна  $\eta$ , рассчитываемой по формуле (5.1);

3) возвышение свободной поверхности, создаваемое элементарным источником в точке с координатами  $(x, y)$  относительно его центра, рассчитывается численно по формуле (5.11);

4) итоговое начальное возвышение определяется как суперпозиция вкладов всех элементарных источников.

Возмущение, создаваемое элементарным источником, экспоненциально быстро затухает при удалении от его границы: уже на расстоянии порядка трех глубин возмущение становится пренебрежимо малым. Этот факт дает основание рассматривать вклад только ближайших к рассматриваемой точке элементарных источников, что значительно облегчает вычислительную процедуру.

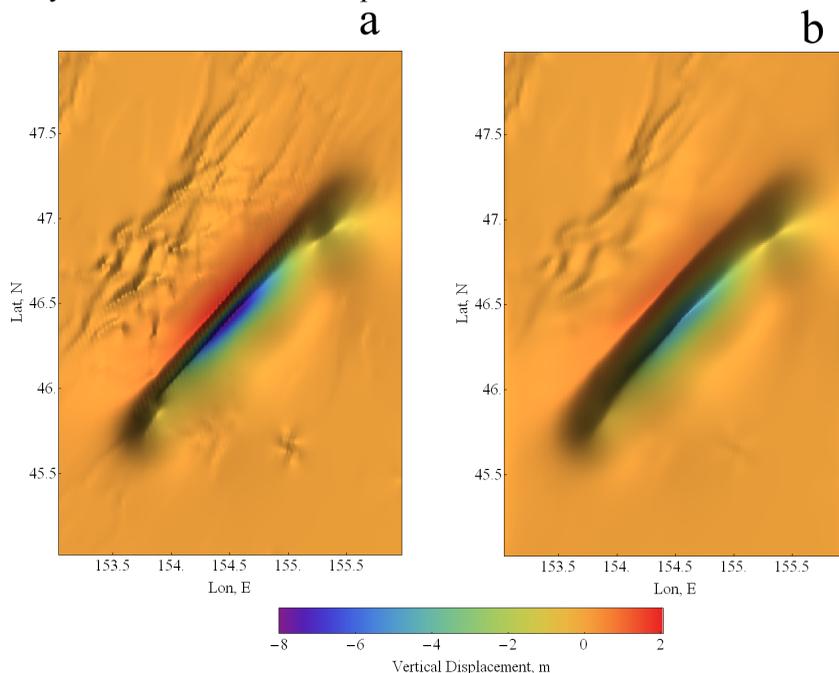
На Рис. 5.5 а представлена функция  $\eta$ , которая описывает косейсмическую деформацию поверхности дна океана в очаге цунами Тохоку 2011. Расчет функции  $\eta$  выполнен с использованием формулы (5.1). Векторное поле косейсмической деформации рассчитано по данным о распределении подвижки, представленным на сайте Геологической службы США (USGS).



*Рис. 5.5. Очаг цунами Тохоку 2011: косейсмическая деформация дна (a) и начальное возвышение водной поверхности (b), полученное в результате использования аналитико-численного алгоритма*

На Рис. 5.5 b показано соответствующее начальное возвышение на поверхности воды (функция  $\xi$ ), полученное с применением описанного выше аналитико-численного алгоритма. Видно, что вдали от берега, там где глубины океана значительны, структура начального возвышения является существенно более гладкой, чем структура косейсмической деформации. На малых глубинах различие между функциями  $\xi$  и  $\eta$  практически не заметно. В

силу того, что размер очага цунами Тохоку 2011 многократно превосходит глубину океана, разница между функциями  $\xi$  и  $\eta$  оказывается несущественной. Фактически эта разница представляет собой «тонкую структуру» – коротковолновые возмущения, которые присущи функции  $\eta$ , но отсутствуют в функции  $\xi$ . Негативная роль таких коротковолновых возмущений, которые, напомним, не существуют в реальности, уже обсуждалась в начале этого раздела.



*Рис. 5.6. Очаг цунами 13 января 2007 г на Центральных Курилах: косейсмическая деформация дна (а) и начальное возвышение водной поверхности (б), полученное в результате использования аналитико-численного алгоритма*

Эффект сглаживания может иметь более впечатляющие проявления в тех случаях, когда размер очага цунами оказывается сопоставимым с глубиной океана. Характерным примером здесь служит цунамигенное землетрясение, произошедшее на

Центральных Курилах 13 января 2007 г. Очаг цунами был приурочен к глубоководному Курило-Камчатскому желобу и при этом имел незначительную ширину (Рис. 5.6а). Амплитуда вертикальной деформации дна, рассчитанная по распределению подвижки (USGS), составила: поднятие – 1.9 м, опускание – 7.7 м. Горизонтальная деформация дна достигала 3.4 м. Начальное возвышение, рассчитанное с применением АЧА (Рис. 5.6 б), довольно сильно отличается от косейсмической деформации. Амплитуда отклонения водной поверхности в начальном возвышении оказывается приблизительно в два раза меньше, чем амплитуда вертикальной деформации дна (поднятие – 0.8 м, опускание – 4.4 м). Видно, что в данном случае пренебрежение «сглаживающим эффектом» приводит к почти двухкратному завышению амплитуды волны цунами.

В заключение отметим, что начальное возвышение, рассчитанное из решения задачи (5.5)-(5.7), конечно, свободно от мелкомасштабных пространственных неоднородностей, которые могут быть свойственны косейсмической деформации дна, но все же оно содержит в себе компоненты с длиной волны  $\lambda \sim H$ . Такие волны, в отличие от длинных ( $\lambda \gg H$ ), подвержены фазовой дисперсии, а, следовательно, их распространение, особенно на трансокеанские расстояния, не может быть адекватно описано теорией длинных волн.

## 5.2. Остаточные гидродинамические поля

В этом параграфе мы обратимся к горизонтальным движениям водного слоя, которые сопутствуют генерации цунами землетрясением во вращающемся океане. В рамках линейной теории длинных волн на основе аналитического решения модельной осесимметричной задачи для океана постоянной глубины будет проанализирована пространственная структура потенциального и вихревого остаточных полей, а также выполнены оценки горизонтальных смещений частиц воды, скорости вихревого течения и энергии геострофического вихря для условий, свойственных реальным очагам цунами. Отдельно будут

рассмотрены особенности остаточных полей, обусловленные наличием устойчивой стратификации.

### 5.2.1. Вводные замечания

Основным механизмом возбуждения волн цунами является вытеснение воды остаточными (косейсмическими) деформациями дна океана, которые образуются в результате сильных подводных землетрясений. При очень сильных цунамигенных землетрясениях, таких, например, как землетрясения у берегов Суматры 26.12.2004 или Японии 11.03.2011, объем вытесненной воды может достигать  $\sim 100 \text{ км}^3$  [Grilli et al., 2007; Nosov et al., 2014].

Под влиянием силы тяжести вытесненный объем распределяется в океане в области, примыкающей к очагу цунами. Этот процесс сопровождается «остаточным» смещением частиц воды в горизонтальном направлении от их исходного положения. Одновременно под влиянием силы Кориолиса формируется «остаточный» геострофический вихрь. Образно говоря, цунамигенное землетрясение оставляет в океане два следа: потенциальный (смещения частиц воды) и вихревой. В дальнейшем будем именовать такие смещения частиц воды и геострофический вихрь потенциальным и вихревым остаточными гидродинамическими полями. Заметим, что остаточными эти поля являются условно, в силу того, что они существуют на фоне иных океанических течений, кроме того, вихревое поле должно медленно затухать под влиянием диссипативных процессов.

Первые аналитические работы, посвященные формированию вихревых полей в очагах цунами, появились более 30 лет назад [Доценко, 1982, 1999; Войт и др., 1986; Бобрович, 1990; Пелиновский, 1996; Ингель, 1998; Доценко, Шокин, 2001]. Но потенциальное остаточное поле, которое представляется более перспективным с точки зрения его обнаружения в природе, по странному стечению обстоятельств, оставалось без внимания вплоть до последних лет [Носов и др., 2011; Nosov et al., 2013; Носов, Нурисламова, 2012, 2013].

В настоящее время для принятия решения об объявлении тревоги цунами руководствуются магнитудно-географическим критерием [Users Guide..., 2017; Поплавский и др., 2009; Чебров, 2019]. Сильная зависимость параметров цунами от механизма очага землетрясения и его глубины, от глубины океана и тектонических особенностей региона делает этот критерий недостаточно надежным [Gusiakov, 2011]. Поэтому для уточнения прогноза всегда привлекают дополнительную информацию – данные с глубоководных или береговых станций уровня моря. Расширение круга измеряемых параметров, несомненно, должно способствовать повышению надежности прогноза цунами. Наряду с вариациями уровня моря (вертикальными движениями водного слоя) для оценки цунамигенности подводных землетрясений можно использовать также и горизонтальные движения и, в том числе, остаточные гидродинамические поля. Замечательным свойством остаточных полей является их прямая связь с основным механизмом генерации цунами – вытеснением воды косейсмической деформацией дна.

В силу значительного преобладания горизонтальных масштабов рассматриваемого явления над вертикальными, скорость течений, которые формируют остаточные поля, практически не зависит от вертикальной координаты – в движение вовлечен весь водный слой. И, кроме того, горизонтальные движения существенно превосходят вертикальные по амплитуде (см. Рис. 3.4). Возможно, именно эти два свойства позволят в будущем эффективно выявлять остаточные поля на фоне иных океанических процессов. Здесь важно заметить, что для стратифицированного океана остаточные поля могут иметь неоднородную вертикальную структуру.

На современном этапе развития океанографии остаточные поля могут быть зарегистрированы *in situ* несколькими способами. Во-первых, для для этих целей пригодны поверхностные или подповерхностные дрейфтеры, оснащенные системой спутникового позиционирования или акселерометрами [Okal, MacAyeal, 2006]. Подчеркнем важность использования именно свободно плавающих систем, следующих за движениями водного слоя. Заякоренные буи, оснащенные системой спутниковой навигации, которые недавно стали использовать для регистрации цунами

(вариаций уровня моря) [Kato et al., 2011], для изменения горизонтальных движений, разумеется, непригодны. Во-вторых, горизонтальные движения могут быть обнаружены посредством акустических доплеровских измерителей профиля скорости (ADCP), установленных на дне океана [Mikada et al., 2006]. И, наконец, картина остаточного поля может быть восстановлена путем обработки последовательных спутниковых снимков высокого разрешения [Crocker et al., 2007].

### 5.2.2. Однородный океан

Рассмотрим слой однородной несжимаемой жидкости переменной глубины  $H$  на вращающейся Земле. Сферичностью Земли пренебрежем. Начало прямоугольной системы координат расположим на невозмущенной поверхности воды. Ось  $Oz$  направим вертикально вверх, а оси  $Ox$  и  $Oy$  – на восток и на север соответственно. Математическую модель будем основывать на уравнениях линейной теории длинных волн (см. раздел 3.2), которые широко применяются для описания волн цунами в открытом океане

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + fv, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - fu, \quad (5.21)$$

где  $\xi$  – смещение свободной поверхности воды от равновесного положения,  $\eta$  – смещение поверхности дна от исходного положения,  $u$  и  $v$  – компоненты горизонтальной скорости течения вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $f$  – параметр Кориолиса. Будем полагать  $f = \text{const}$  (приближение f–плоскости) [Gill, 1982].

Пусть в начальный момент времени  $t=0$  поверхность дна описывается уравнением  $z_b = -H(x, y)$ , а водный слой находится

в состоянии покоя ( $u = v = 0$ ,  $\xi = 0$ ). В результате землетрясения дно перемещается в новое положение  $z_b = -H(x, y) + \eta_\infty(x, y)$ , где  $\eta_\infty(x, y)$  – остаточная деформация дна малой амплитуды ( $|\eta_\infty| \ll H$ ). Заметим, что малость амплитуды деформации дна означает, что изменением рельефа дна можно пренебречь.

Представим поле скорости течения, инициируемое деформацией дна, как суперпозицию потенциального и вихревого полей

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.22)$$

где  $\varphi$  – потенциал,  $\psi$  – функция тока. Используя формулы (5.22), перепишем систему (5.19)-(5.21) в терминах  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\xi$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \Delta \varphi + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f \varphi, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -g \xi - f \psi. \quad (5.25)$$

Интегрируя уравнения (5.23), (5.24) по времени от  $t = 0$  до  $t = T$  с учетом нулевых начальных условий ( $\xi_0 = 0$ ,  $\eta_0 = 0$ ), получаем

$$\xi_T - \eta_T + H \Delta \Phi_T + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Phi_T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Phi_T}{\partial y} + \int_0^T \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dt = 0, \quad (5.26)$$

$$\psi_T = f \Phi_T, \quad (5.27)$$

где  $\Phi_T = \int_0^T \varphi dt$  – потенциал смещений,  $\psi_T$  – функция тока в момент времени  $t = T$ .

Пусть к моменту времени  $t = T$  деформации дна завершились, и волны цунами покинули рассматриваемую область. Из уравнения (5.26) видно, что существование остаточных (т.е. стационарных) полей возможно при условии

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (5.28)$$

Условие (5.28) означает, что скорость стационарного вихревого течения направлена строго вдоль изобат, т.е. вихревое течение должно быть адаптировано к рельефу дна [Зырянов, 1995; Носов и др., 2011, 2014]. Заметим, что в стационарных условиях, когда потенциальные движения прекратились, а вихревые установились, уравнение (5.25) принимает следующий вид:

$$g \xi_T + f \psi_T = 0. \quad (5.29)$$

Из формулы (5.29) следует, что существование остаточного вихревого поля требует ненулевого остаточного смещения свободной поверхности.

При условии  $H = const$  задача (5.26), (5.27), (5.29) существенно упрощается. Нестационарный член в уравнении (5.26) автоматически обращается в ноль, что обеспечивает безусловную возможность существования стационарных полей.

Для выделения остаточных полей положим в уравнениях (5.26), (5.27), (5.29)  $T = \infty$ . В итоге система приобретает следующий вид:

$$\xi_\infty - \eta_\infty + H \Delta \Phi_\infty = 0, \quad (5.30)$$

$$\psi_\infty = f \Phi_\infty, \quad (5.31)$$

$$g \xi_\infty + f \psi_\infty = 0. \quad (5.32)$$

Исключив из системы (5.30)-(5.32) функции  $\psi_\infty$  и  $\Phi_\infty$ , приходим к неоднородному уравнению Гельмгольца [Носов, Нурисламова, 2012]

$$R_0^2 \Delta \xi_\infty - \xi_\infty = -\eta_\infty, \quad (5.33)$$

где  $R_0^2 = gH / f^2$  – квадрат баротропного радиуса деформации Россби.

Зададим остаточную деформацию дна в виде осесимметричного поднятия радиуса  $R$  и амплитуды  $\eta_{0\max}$

$$\eta_0(r) = \eta_{0\max} [1 - \theta(r - R)], \quad (5.34)$$

где  $\theta$  – функция Хевисайда. Далее в уравнении (5.33) перейдем к цилиндрическим координатам и безразмерной переменной  $r^* = r / R$

$$\frac{\partial^2 \xi_\infty}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \xi_\infty}{\partial r^*} - \mu_0^2 \xi_\infty = -\mu_0^2 \eta_\infty, \quad (5.35)$$

где  $\mu_0^2 = R^2 / R_0^2$  – единственный безразмерный параметр задачи, который варьируются от 0 на экваторе до  $\sim 1$  в высоких широтах при протяженном очаге и шельфовых глубинах. Типичное значение параметра  $\mu_0 \sim 0.1$  (при  $f \sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $R \sim 10^5 \text{ м}$ ,  $H \sim 10^3 \text{ м}$ ). Для представления результатов мы выбрали диапазон  $10^{-3} < \mu_0 < 10^1$ , в котором проявляются наиболее интересные особенности решения.

Решение уравнения (5.35) выражается через функции Инфельда  $I_i$  и Макдональда  $K_i$  [Полянин, 2001]

$$\xi_\infty = \eta_{0 \max} \begin{cases} 1 - \mu_0 K_1(\mu_0) I_0(\mu_0 r^*), & 0 \leq r^* < 1, \\ \mu_0 K_0(\mu_0 r^*) I_1(\mu_0), & r^* \geq 1. \end{cases} \quad (5.36)$$

На Рис. 5.7 представлен вид функции  $\xi_\infty$ , рассчитанной по формуле (5.36) при типичном значении  $\mu_0 = 0.1$ . Функция  $\xi_\infty$  достигает максимума в центре источника и остается практически неизменной вплоть до его границы. В типичных природных условиях амплитуда смещения поверхности в остаточном геострофическом вихре составляет  $\sim 1\%$  амплитуды деформации дна. Вне источника функция  $\xi_\infty$  монотонно убывает, причем при больших значениях радиуса убывает экспоненциально быстро в соответствии с асимптотикой функции Макдональда:  $\xi_\infty \sim \exp(-\mu_0 r^*) / \sqrt{r^*}$ .

Зная функцию  $\xi_\infty$ , из уравнений (5.31), (5.32) находим функции  $\Phi_\infty$  и  $\psi_\infty$ , по которым определяются остаточное смещение частиц воды в радиальном направлении  $D_\infty$  и скорость в геострофическом вихре  $v_\infty$

$$D_\infty = \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial r} = \frac{\eta_{0 \max} R}{H} \beta, \quad (5.37)$$

$$v_\infty = -\frac{\partial \psi_\infty}{\partial r} = -\frac{\eta_{0 \max} R f}{H} \beta. \quad (5.38)$$

Функция  $\beta$ , которая определяет пространственную структуру остаточных полей, дается следующим выражением:

$$\beta = \begin{cases} I_1(\mu_0 r^*) K_1(\mu_0), & 0 \leq r^* < 1, \\ I_1(\mu_0) K_1(\mu_0 r^*), & r^* \geq 1. \end{cases} \quad (5.39)$$

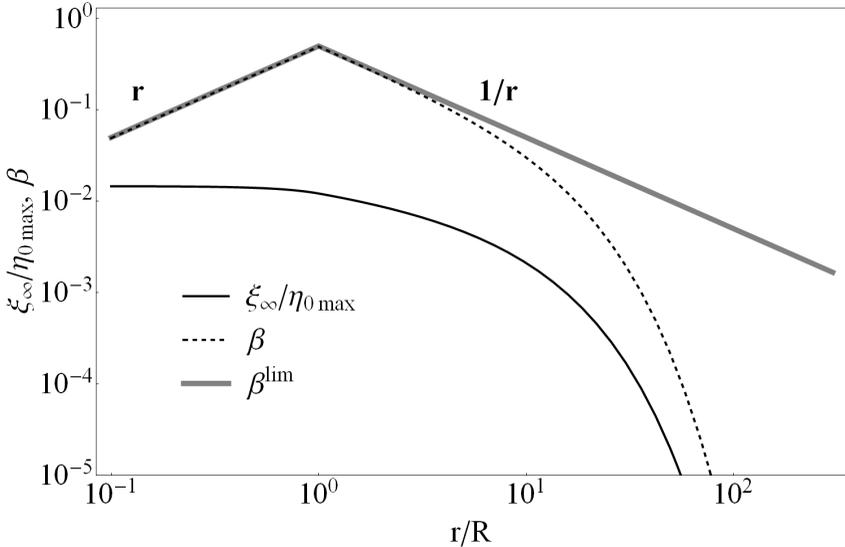


Рис. 5.7. Смещение свободной поверхности воды в остаточном геострофическом вихре  $\xi_\infty$ , функция  $\beta$  (при  $\mu_0 = 0.1$ ) и ее предельное значение  $\beta^{\text{lim}}$  (при  $\mu_0 \rightarrow 0$ )

Вид функции  $\beta$ , рассчитанной при типичном значении  $\mu_0 = 0.1$ , представлен на Рис. 5.7. Функция  $\beta$  всегда положительна. Это означает, что поднятие дна ( $\eta_{0\text{max}} > 0$ ) сопровождается смещением частиц воды в положительном направлении – от центра источника. В Северном полушарии, где параметр Кориолиса  $f > 0$ , поднятие дна вызывает вихрь, вращающийся в отрицательном направлении (антициклонический). Опускание дна ( $\eta_{0\text{max}} < 0$ ) приводит к

обратному результату – смещению частиц к центру и к циклоническому вихрю.

При любых значениях параметра  $\mu_0$  функция  $\beta$  обращается в ноль в центре источника и достигает максимума на его границе. Вне источника функция  $\beta$  монотонно убывает, причем при больших значениях радиуса – также как и функция  $\xi_\infty$  – она убывает экспоненциально быстро:  $\beta \sim \exp(-\mu_0 r^*) / \sqrt{r^*}$ . Отсюда следует интересный вывод: вращение Земли ограничивает область проявления как вихревого, так и потенциального остаточного поля. Иными словами, вопреки «здравому смыслу» вытесненный объем растекается не по всей акватории, а остается внутри области, ограниченной баротропным радиусом деформации Россби ( $R_0^* \equiv R_0 / R = 1/\mu$ ). Вне этой области остаточные смещения частиц воды оказываются нулевыми, что, разумеется, не отменяет возвратно-поступательные движения частиц воды при распространении гравитационных волн на любом расстоянии от источника.

Устремляя к нулю силу Кориолиса, находим предел функции  $\beta$

$$\beta^{\text{lim}}(r^*) \equiv \lim_{\mu_0 \rightarrow 0} \beta(r^*, \mu_0) = 0.5 \begin{cases} r^*, & 0 \leq r^* < 1, \\ 1/r^*, & r^* \geq 1. \end{cases} \quad (5.40)$$

Предельная функция  $\beta^{\text{lim}}$  показана на Рис. 5.7 толстой серой линией. Видно, что в типичных природных условиях ( $\mu_0 = 0.1$ ) эффекты вращения Земли слабо влияют на потенциальное поле вплоть до расстояний порядка  $R_0$

$$\beta(r^*, \mu_0) \approx \beta^{\text{lim}}(r^*) \text{ при } r^* < 1/\mu_0. \quad (5.41)$$

По смещению свободной поверхности и полю скорости рассчитаем потенциальную  $W_p$  и кинетическую  $W_k$  энергии геострофического вихря:

$$W_p = \pi \rho g \int_0^\infty \xi^2 r dr, \quad (5.42)$$

$$W_k = \pi H \rho \int_0^\infty v^2 r dr, \quad (5.43)$$

где  $\rho$  – плотность воды. Вычисляя интегралы (5.42) и (5.43) аналитически, получаем

$$W_p / W_0 = 1 - \mu_0^2 I_1^2(\mu_0) K_0^2(\mu_0) - 4I_1(\mu_0) K_1(\mu_0) + \mu_0^2 I_0^2(\mu_0) K_1^2(\mu_0), \quad (5.44)$$

$$W_k / W_0 = \mu_0 [I_1(\mu_0) K_2(\mu_0) - I_0(\mu_0) K_1(\mu_0)], \quad (5.45)$$

где  $W_0 = 0.5\pi\rho g R^2 \eta_{0\max}^2$  – потенциальная энергия возмущения свободной поверхности, эквивалентного по форме остаточной деформации дна.

На Рис. 5.8 представлены компоненты энергии геострофического вихря в зависимости от параметра  $\mu_0$ . При увеличении  $\mu_0$  потенциальная энергия монотонно возрастает, стремясь к 1. Зависимость для кинетической энергии немонотонна, она обладает максимумом при  $\mu_0 \approx 1.587$ . При малых значениях  $\mu_0$  потенциальная энергия существенно меньше кинетической. При  $\mu_0 \approx 0.956$  значения энергий сравниваются. При  $\mu_0 > 0.956$  потенциальная энергия превосходит кинетическую. Полная энергия вихря монотонно растет при увеличении параметра  $\mu_0$ , стремясь к 1. В типичных условиях ( $\mu_0 \sim 0.1$ ) в геострофическом вихре связывается  $\sim 1\%$  энергии начального возвышения (энергии цунами).

На Рис. 5.8 также представлены амплитуда смещения поверхности  $\xi_{\infty\max} / \eta_{0\max} \equiv \xi_{\infty}(r^* = 0) / \eta_{0\max} = 1 - \mu_0 K_1(\mu_0)$  и величина  $\beta_{\max} \equiv \beta(r^* = 1) = I_1(\mu_0) K_1(\mu_0)$  как функции параметра  $\mu_0$ . Увеличение  $\mu_0$  ведет к росту смещения свободной поверхности  $\xi_{\infty\max} / \eta_{0\max}$ , в то время как величина  $\beta_{\max}$  монотонно убывает. В типичных природных условиях ( $\mu_0 < 0.1$ ) с хорошей точностью можно полагать  $\beta_{\max} \approx 0.5$ , и для оценки максимальных значений горизонтального смещения частиц воды и скорости вихревого течения вместо выражений (5.37)-(5.38) использовать приближенные формулы:  $D_{\infty\max} \approx 0.5\eta_{0\max} R / H$ ,  $v_{\infty\max} \approx 0.5\eta_{0\max} R f / H$ . Подставляя в них типичные значения

параметров очага цунами ( $\eta_{0\max} = 1\text{ м}$ ,  $R = 10^5\text{ м}$ ,  $H = 10^3\text{ м}$ ,  $f = 10^{-4}\text{ с}$ ), получаем:  $D_{\infty\max} = 50\text{ м}$ ,  $v_{\infty\max} = 0.005\text{ м/с}$ .

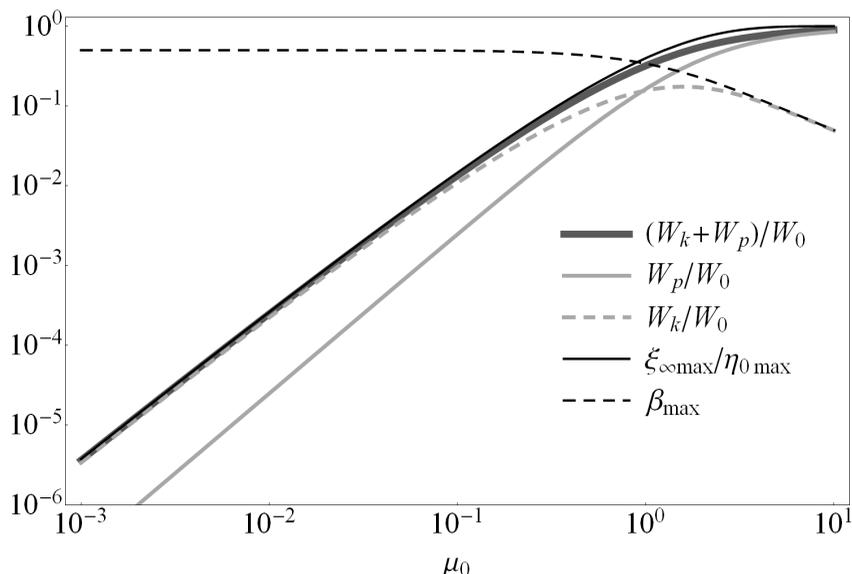


Рис. 5.8. Полная  $W_k + W_p$ , потенциальная  $W_p$  и кинетическая  $W_k$  энергии остаточного геострофического вихря, максимальное значение смещения свободной поверхности воды в геострофическом вихре  $\xi_{\infty\max}$  и величина  $\beta_{\max}$  как функции параметра  $\mu_0$

Горизонтальные смещения порядка 50 м легко могут быть зарегистрированы в океане, например, с использованием дрейфтеров, оснащенных системой спутникового позиционирования или акселерометром. Но скорость в геострофическом вихре  $\sim 0.005\text{ м/с}$  оказывается столь малой, что выявить ее на фоне прочих океанических течений будет непросто.

Отдельного комментария заслуживает гипотетическая для условий нашей планеты ситуация  $\mu_0 > 1$ , когда доминирующим оказывается не потенциальное, а вихревое остаточное поле. Эта

ситуация интересна тем, что при ее реализации основная доля энергии, передаваемой водному слою сейсмическим источником, переходит не к гравитационным волнам (цунами), а связывается в геострофическом вихре. Впрочем, для реализации таких экзотических режимов необходимо, чтобы горизонтальный размер очага цунами  $R$  заметно превосходил баротропный радиус деформации Россби  $R_0$ , что практически невозможно в условиях нашей планеты (типичные значения:  $R \sim 10^5$  м,  $R_0 \sim 10^6$  м). В качестве одного из возможных исключений здесь стоит указать на сильные глубоководные землетрясения. Возбуждаемые ими движения водного слоя могут быть подвержены сильному влиянию вращения Земли. За счет заглубления очага землетрясения до 700 км область косейсмических деформаций оказывается столь обширной, что она может быть сопоставима с радиусом деформации Россби [Носов и др., 2018; 2019].

### 5.2.3. Стратифицированный океан

В разделе 5.2.2 мы полагали океан однородным. Реальному океану свойственна устойчивая стратификация. Заранее отметим, что учет стратификации не просто приводит к корректировке полученных выше оценок, но и обеспечивает возможность существования новой разновидности остаточных полей – стационарных возмущений стратификационной структуры в очаге цунами [Доценко, Шокин, 2001; Носов, Нурисламова, 2013; Носов и др., 2014]. Такие возмущения могут быть образованы как в результате вытеснения воды остаточной деформацией дна, так и в результате интенсификации вертикального обмена над очагом подводного землетрясения [Левин и др., 1998]. При эволюции стратификационной структуры в качестве горизонтального масштаба следует рассматривать не баротропный, а бароклиный радиус деформации Россби. В противоположность баротропному радиусу  $R_0 \sim 10^6$  м, бароклиный радиус  $R_1 \sim 10^4$  м [Gill, 1982] уступает размеру очага цунами ( $R \sim 10^5$  м). Поэтому следует ожидать, что вращение Земли будет эффективно связывать в очаге цунами возмущения стратификационной структуры, препятствуя

их распаду на серию внутренних волн, как это описано, например, в классической работе [Hammack, 1980]. Впрочем, как следует из заключительного раздела этой работы, Joseph Hammack, несомненно, понимал важность «эффекта Кориолиса» для эволюции внутреволновых возмущений.

В качестве наиболее простой модели стратифицированного океана рассмотрим двухслойную жидкость. Верхний слой имеет толщину  $H_1$  и плотность  $\rho$ , а нижний слой – толщину  $H_2$  и плотность  $\rho + \delta\rho$  ( $\delta\rho > 0$ ). Для описания движений жидкости вновь применим уравнения линейной теории длинных волн, записанные с учетом предположения  $\delta\rho/\rho \ll 1$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + f v_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi_1}{\partial y} - f u_1, \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\delta\rho}{\rho} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) + f v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\delta\rho}{\rho} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \right) - f u_2, \quad (5.47)$$

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) H_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0, \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) H_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (5.48)$$

где  $u_i$  и  $v_i$  – компоненты горизонтальной скорости течения  $i$ -го слоя ( $i = 1, 2$ ) вдоль осей  $0x$  и  $0y$  соответственно,  $\xi_i$  – смещение поверхности  $i$ -го слоя от равновесного положения. Все прочие обозначения остаются в силе.

Как и в задаче для однородного океана будем полагать, что до землетрясения океан находится в состоянии покоя ( $u_i = v_i = 0$ ,  $\xi_i = 0$ ), а все движения в океане инициированы малыми деформациями дна  $\eta_\infty(x, y)$  ( $|\eta_\infty| \ll H_i$ ). Подход к преобразованию уравнений (5.46)-(5.48) аналогичен тому, который был использован в разделе 5.2.2. Поле скорости выражается через потенциал и функцию тока, и уравнения интегрируются по времени от 0 до  $\infty$ . В итоге несложных преобразований приходим к системе, описывающей остаточные поля в двухслойной вращающейся жидкости

$$H_1 \Delta \Phi_{1\infty} = \xi_{2\infty} - \xi_{1\infty}, \quad H_2 \Delta \Phi_{2\infty} = \eta_\infty - \xi_{2\infty}, \quad (5.49)$$

$$\Delta\psi_{i\infty} = f\Delta\Phi_{i\infty}, \quad (5.50)$$

$$g\Delta\xi_{1\infty} + f\Delta\psi_{1\infty} = 0, \quad g\Delta\xi_{1\infty} + g\frac{\delta\rho}{\rho}\Delta\xi_{2\infty} + f\Delta\psi_{2\infty} = 0, \quad (5.51)$$

где  $\xi_{i\infty}$  – остаточное смещение  $i$ -й поверхности,  $\psi_{i\infty}$  – функция тока, описывающая остаточное вихревое поле в  $i$ -м слое,

$$\Phi_{i\infty} \equiv \int_0^{\infty} \varphi_i dt - \text{потенциал смещений, по которому рассчитывается}$$

вектор остаточного смещения частиц воды в горизонтальном направлении в  $i$ -м слое:  $\mathbf{D}_{i\infty} = \nabla\Phi_{i\infty}$ .

Исключив из уравнений (5.49)-(5.51) функции  $\psi_{i\infty}$  и  $\Phi_{i\infty}$ , получаем систему уравнений

$$R_0^2 \Delta\xi_{1\infty} = (1 + \gamma)(\xi_{1\infty} - \xi_{2\infty}), \quad (5.52)$$

$$R_1^2 \Delta\xi_{2\infty} - \xi_{2\infty} = -\frac{1}{1 + \gamma}(\eta_{\infty} + \gamma\xi_{1\infty}), \quad (5.53)$$

где  $R_0 = c_0 / f$  и  $R_1 = c_1 / f$  – баротропный и бароклинный радиусы деформации Россби,  $c_0 = \sqrt{g(H_1 + H_2)}$  – скорость длинных гравитационных волн в однородной жидкости,  $c_1 = \sqrt{g\delta\rho H_1 H_2 / \rho(H_1 + H_2)}$  – скорость длинных внутренних волн в двухслойной жидкости [Gill, 1982],  $\gamma = H_2 / H_1$  – отношение толщин нижнего и верхнего слоев.

Определив из системы (5.52), (5.53) функции  $\xi_{1\infty}$  и  $\xi_{2\infty}$ , можно, используя уравнения (5.50), (5.51), рассчитать и все остальные искомые функции

$$\psi_{1\infty} = -\frac{g}{f}\xi_{1\infty}, \quad \Phi_{1\infty} = -\frac{g}{f^2}\xi_{1\infty}, \quad (5.54)$$

$$\psi_{2\infty} = -\frac{g}{f}\left(\xi_{1\infty} + \frac{\delta\rho}{\rho}\xi_{2\infty}\right), \quad \Phi_{2\infty} = -\frac{g}{f^2}\left(\xi_{1\infty} + \frac{\delta\rho}{\rho}\xi_{2\infty}\right). \quad (5.55)$$

В качестве модели остаточной деформации дна будем рассматривать простое осесимметричное поднятие, описываемое формулой (5.34). Но даже в случае цилиндрической симметрии аналитическое решение для системы (5.52)-(5.53) построить не

удается. Поэтому далее задачу будем решать приближенно, предположив, что стратификация слабо влияет на смещение свободной поверхности в геострофическом вихре. Для подтверждения работоспособности такого предположения аппроксимируем оператор Лапласа в уравнениях (5.33), (5.52) и (5.53) по теории размерности ( $\Delta \sim R^{-2}$ ). Из полученных в итоге алгебраических уравнений вытекает следующая оценка:

$$\frac{\xi_{\infty} - \xi_{1\infty}}{\xi_{\infty}} \sim \frac{R_1^2 (R_0^2 + R^2 (1 + \gamma))}{(R^2 + R_0^2)(R^2 + R_1^2) + R^2 R_1^2 \gamma}. \quad (5.56)$$

Подставляя в формулу (5.56) типичные значения параметров ( $R = 10^5$  м,  $R_0 = 10^6$  м,  $R_1 = 10^4$  м,  $\gamma = 10$ ), получаем:  $(\xi_{\infty} - \xi_{1\infty}) / \xi_{\infty} \sim 0.01$ . Следовательно, наличие стратификации действительно слабо сказывается на смещении свободной поверхности в геострофическом вихре.

Итак, для получения приближенного решения будем полагать, что  $\xi_{1\infty} = \xi_{\infty}$ , где  $\xi_{\infty}$  – известная функция, определяемая формулой (5.36). Уравнение (5.52) для дальнейшего решения уже не требуется. Запишем уравнение (5.53) в цилиндрических безразмерных координатах ( $r^* = r / R$ )

$$\frac{\partial^2 \xi_{2\infty}}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \xi_{2\infty}}{\partial r^*} - \mu_1^2 \xi_{2\infty} = -\frac{\mu_1^2}{1 + \gamma} (\eta_{\infty} + \gamma \xi_{1\infty}), \quad (5.57)$$

где  $\mu_1 = R / R_1$ . Уравнения (5.57) и (5.35) идентичны по типу и отличаются только функцией, стоящей в правой части. Решение уравнения (5.35) было получено выше. Решение уравнения (5.57) записываем по аналогии

$$\xi_{2\infty} = \frac{\eta_{0 \max}}{1 + \gamma} (\zeta_1 + \gamma \zeta_2), \quad (5.58)$$

$$\zeta_1 = \begin{cases} 1 - \mu_1 K_1(\mu_1) I_0(\mu_1 r^*), & 0 \leq r^* < 1, \\ \mu_1 K_0(\mu_1 r^*) I_1(\mu_1), & r^* \geq 1, \end{cases}$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} 1 + \frac{\mu_0 \mu_1 (-\mu_1 I_0(r^* \mu_0) K_1(\mu_0) + \mu_0 I_0(r^* \mu_1) K_1(\mu_1))}{\mu_1^2 - \mu_0^2}, & 0 \leq r^* < 1, \\ \frac{\mu_0 \mu_1 (\mu_1 I_1(\mu_0) K_0(r^* \mu_0) - \mu_0 I_1(\mu_1) K_0(r^* \mu_1))}{\mu_1^2 - \mu_0^2}, & r^* \geq 1. \end{cases}$$

Определив функции  $\xi_{i\infty}$ , с использованием формул (5.54), (5.55), рассчитываем функции  $\Phi_{i\infty}$  и  $\Psi_{i\infty}$ , по которым находим остаточные смещения частиц воды в радиальном направлении  $D_{i\infty} = \partial \Phi_i / \partial r$  и скорость вихревого течения  $v_{i\infty} = -\partial \Psi_{i\infty} / \partial r$ .

В верхнем слое, в силу принятого упрощающего предположения ( $\xi_{1\infty} = \xi_{\infty}$ ), искомые величины соответствуют случаю однородного океана:  $D_{1\infty} = D_{\infty}$ ,  $v_{1\infty} = v_{\infty}$  – они могут быть рассчитаны по формулам (5.37) и (5.38).

Для нижнего слоя решение имеет вид:

$$D_{2\infty} = \frac{\eta_{0\max} R}{H_1 + H_2} (\beta + \Delta\beta), \quad (5.59)$$

$$v_{2\infty} = -\frac{\eta_{0\max} R f}{H_1 + H_2} (\beta + \Delta\beta), \quad (5.60)$$

$$\Delta\beta = \frac{\delta\rho (\sigma_1 + \gamma\sigma_2)}{\rho (1 + \gamma)}, \quad (5.61)$$

$$\sigma_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} \begin{cases} I_1(\mu_1 r^*) K_1(\mu_1), & 0 \leq r^* < 1, \\ I_1(\mu_1) K_1(\mu_1 r^*), & r^* \geq 1. \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2 - \mu_0^2} \begin{cases} I_1(\mu_0 r^*) K_1(\mu_0) - I_1(\mu_1 r^*) K_1(\mu_1), & 0 \leq r^* < 1, \\ I_1(\mu_0) K_1(\mu_0 r^*) - I_1(\mu_1) K_1(\mu_1 r^*), & r^* \geq 1. \end{cases}$$

Из формул (5.59), (5.60) видно, что влияние стратификации на остаточные поля в нижнем слое описывается функцией  $\Delta\beta$ .

Решение, описывающее остаточные поля в двухслойном вращающемся океане, зависит от трех безразмерных параметров:  $\gamma$ ,  $\mu_0$  и  $\mu_1$ . Эти параметры удобны для получения аналитического решения, но они не являются независимыми. В частности, существует связь:  $\mu_1^2 = \mu_0^2 (1 + \gamma)^2 / (\gamma \delta\rho / \rho)$ . Для представления

результатов, удобнее использовать набор независимых параметров:  $\delta\rho/\rho$ ,  $\gamma$  и  $\mu_0$ .

Во всех расчетах, представленных ниже, мы будем основываться на фиксированной величине  $\delta\rho/\rho = 0.003$ , – это типичное значение относительного перепада плотности для океана [Gill, 1982]. Свойственное реальному океану соотношение толщин слоев ( $H_1 \sim 10^2$  м,  $H_2 \sim 10^3$  м) определяет типичное значение параметра  $\gamma \sim 10$ . Впрочем, величина  $\gamma$  может меняться в очень широком диапазоне от  $\gamma_{\min} \sim 10^{-3}$  (тонкий придонный перемешанный слой) до  $\gamma_{\max} \sim 10^3$  (тонкий верхний перемешанный слой). Параметр  $\mu_0$ , как и в разделе 5.2.2, варьируем в пределах:  $10^{-3} < \mu_0 < 10^1$ .

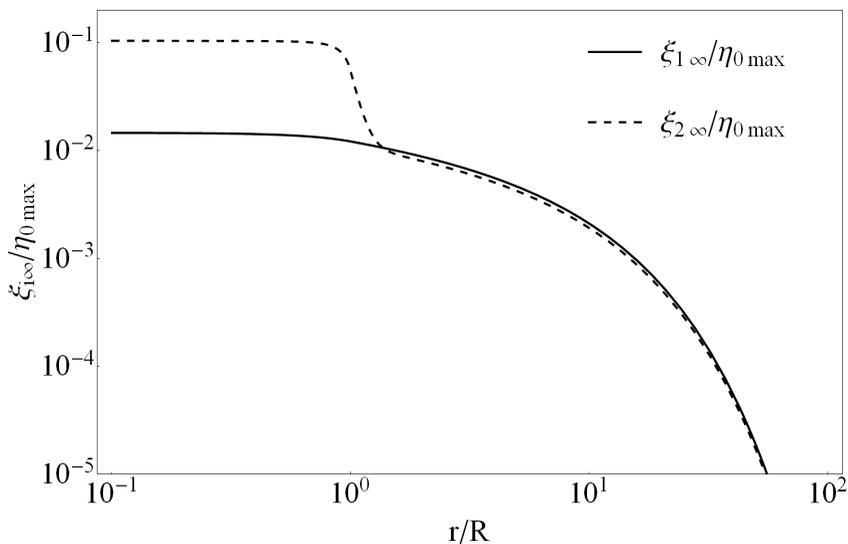


Рис. 5.9. Смещение свободной поверхности воды  $\xi_{1\infty}$  и смещение поверхности раздела слоев  $\xi_{2\infty}$  в остаточном геострофическом вихре. Расчет выполнен при  $\mu_0 = 0.1$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\delta\rho/\rho = 0.003$

На Рис. 5.9 показана форма смещения свободной поверхности воды  $\xi_{1\infty}$  и форма смещения поверхности раздела слоев  $\xi_{2\infty}$ , которые рассчитаны по формулам (5.36), (5.58) при типичных значениях параметров  $\mu_0 = 0.1$  и  $\gamma = 10$ . В первую очередь обращает на себя внимание тот факт, что смещение поверхности раздела слоев по амплитуде на порядок превосходит смещение свободной поверхности, т.е. наблюдается эффект связывания возмущения стратификационной структуры за счет вращения Земли.

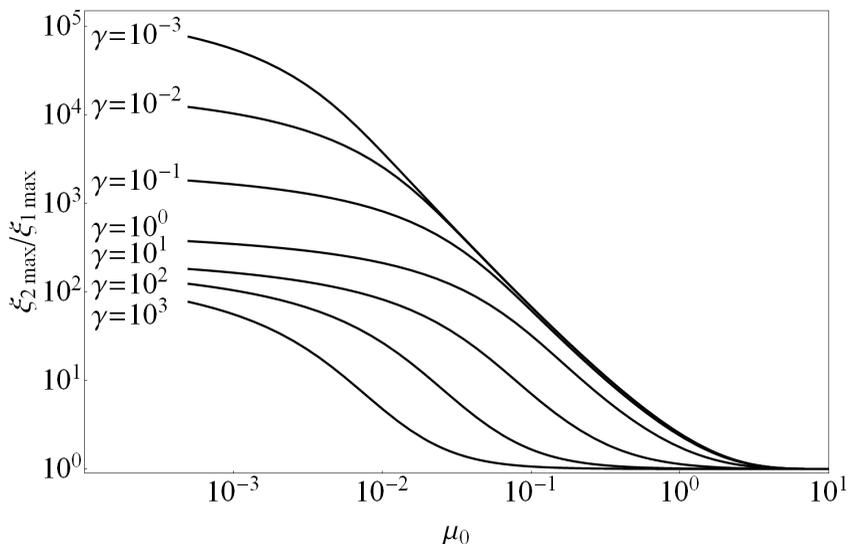


Рис. 5.10. Отношение амплитуд остаточных смещений поверхности раздела слоев  $\xi_{2\max}$  и свободной поверхности  $\xi_{1\max}$  в зависимости от параметра  $\mu_0$ . Расчет выполнен при  $\delta\rho/\rho = 0.003$  для различных значений параметра  $\gamma$  (указаны на рисунке)

Смещение свободной поверхности  $\xi_{1\infty}$  и смещение поверхности раздела  $\xi_{2\infty}$  достигают максимальных значений  $\xi_{1\max}$  и  $\xi_{2\max}$  в центре источника. Используя формулы (5.36), (5.58), рассчитаем отношение  $\xi_{2\max}/\xi_{1\max}$  в зависимости от

параметров  $\mu_0$  и  $\gamma$ . Результаты расчетов представлены на Рис. 5.10. Видно, что во всех случаях амплитуда смещения поверхности раздела  $\xi_{2\max}$  превосходит амплитуду смещения свободной поверхности  $\xi_{1\max}$ , причем в ряде случаев – на несколько порядков. Отношение  $\xi_{2\max}/\xi_{1\max}$  достигает максимальных значений при малых величинах параметров  $\mu_0$  и  $\gamma$ . С ростом параметров  $\mu_0$  и  $\gamma$  отношение  $\xi_{2\max}/\xi_{1\max}$  стремится к 1.

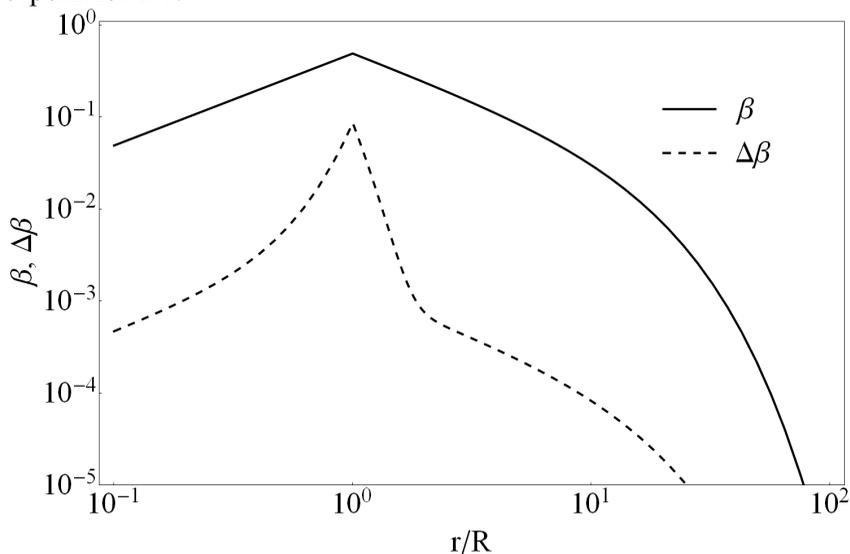


Рис. 5.11. Функции  $\beta$  и  $\Delta\beta$ , определяющие пространственную структуру остаточных полей в двухслойном океане. Расчет выполнен при  $\mu_0 = 0.1$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\delta\rho/\rho = 0.003$

На Рис. 5.11 представлен вид функций  $\beta$  и  $\Delta\beta$ , которые определяют пространственную структуру остаточных полей. Расчет выполнен по формулам (5.39), (5.61) при типичных значениях параметров  $\mu_0 = 0.1$ ,  $\gamma = 10$ . При всех значениях аргумента  $\beta > 0$  и  $\Delta\beta > 0$ . Т.е. добавка  $\Delta\beta$ , которая обязана влиянию стратификации, всегда увеличивает остаточное смещение частиц воды и скорость вихревого течения в нижнем слое.

Рассчитаем максимальные значения функций  $\beta_{\max}$  и  $\Delta\beta_{\max}$ , которые достигаются на границе источника ( $r^*=1$ ). Используя формулы (5.39), (5.61) определим отношение  $\Delta\beta_{\max}/\beta_{\max}$  в зависимости от параметров  $\mu_0$  и  $\gamma$ . Результаты расчетов показаны на Рис. 5.12. Видно, что роль поправки, обязанной стратификации, вообще говоря, нельзя характеризовать как пренебрежимо малую. В типичных природных условиях ( $\delta\rho/\rho = 0.003$ ,  $\mu_0 = 0.1$ ) вклад величины  $\Delta\beta$  в амплитуду остаточных смещений частиц и скорость вихревого течения, конечно, не является преобладающим ( $\gamma = 100$ :  $\Delta\beta_{\max}/\beta_{\max} \approx 0.058$ ;  $\gamma = 10$ :  $\Delta\beta_{\max}/\beta_{\max} \approx 0.176$ ). Однако в случае тонкого нижнего слоя этот вклад может стать преобладающим. Так, например при  $\mu_0 = 0.1$  и  $\gamma = 10^{-3}$  имеем:  $\Delta\beta_{\max}/\beta_{\max} \approx 18$ .

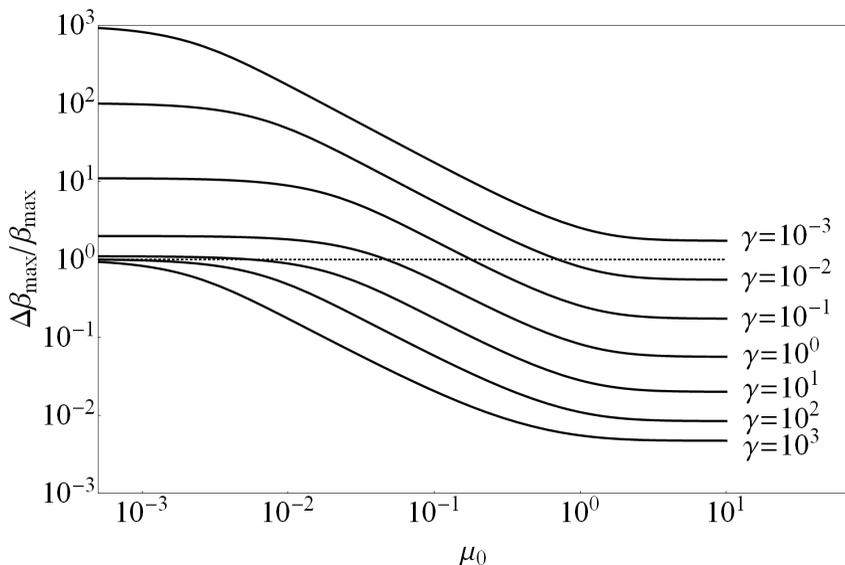


Рис. 5.12. Отношение максимальных значений функций  $\Delta\beta$  и  $\beta$  в зависимости от параметра  $\mu_0$ . Расчет выполнен при  $\delta\rho/\rho = 0.003$  и различных значениях параметра  $\gamma$  (указаны на рисунке)

Сформулируем основные результаты этого раздела. Для однородного океана на основе полностью аналитического решения модельной осесимметричной задачи установлено, что в типичных природных условиях остаточные горизонтальные смещения частиц воды составляют  $\sim 50 м$ , скорость течения в остаточном геострофическом вихре  $\sim 0.005 м/с$ , смещение свободной поверхности  $\sim 1\%$  смещения дна, энергия вихря  $\sim 1\%$  энергии цунами, размеры вихря порядка баротропного радиуса деформации Россби ( $R_0 \sim 10^6 м$ ). Вращение Земли ограничивает область «растекания» объема воды, вытесненного в очаге цунами, пределами радиуса деформации Россби.

Для двухслойного океана на основе приближенного аналитического решения модельной осесимметричной задачи показано, что в типичных природных условиях на поверхности раздела формируется остаточное смещение с амплитудой, заметно превосходящей амплитуду смещения свободной поверхности. Учет стратификации увеличивает остаточные смещения частиц воды и скорость вихревого течения в нижнем слое (в типичных условиях на  $\sim 10\%$ ). Если скачок плотности приурочен к большим глубинам, то на поверхности раздела между слоями формируется остаточное возмущение, сопоставимое по форме и амплитуде с остаточной деформацией дна. В случае тонкого нижнего слоя даже слабая стратификация способна значительно изменить остаточные поля в нижнем слое, увеличив остаточные смещения частиц воды и скорость вихревого течения более чем на порядок. В этой связи оценки остаточных полей с применением донных измерителей скорости течения должны интерпретироваться с осторожностью.

## Литература

- Бобрович А.В. Генерация волн и вихрей в океане подводными землетрясениями. Исследования цунами. М.: Межведомственный геофизический комитет АН СССР, 1990. №4. С.33-41.
- Большакова А.В., Носов М.А., Колесов С.В. Свойства остаточных деформаций океанического дна по данным о структуре подвижки в очагах цунамигенных землетрясений //Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2015. – №. 1. – С. 61-65.
- Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007.
- Войт С.С., Лебедев А.Н., Себекин Б.И. Влияние вращения Земли на энергетические характеристики волн цунами. Исследования цунами. М.: Межведомственный геофизический комитет АН СССР, 1986, №1, с.15-20.
- Гусяков В.К. Сильнейшие цунами Мирового океана и проблема безопасности морских побережий //Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2014. – Т. 50. – №. 5, с. 496–507.
- Гусяков В.К. Магнитудно-географический критерий прогнозирования цунами: анализ практики применения за 1958–2009 гг. // Сейсмические приборы. Т. 46, № 3, 2010. С. 5-21.
- Гусяков В.К. Цунами на дальневосточном побережье России: историческая перспектива и современная проблематика // Геология и геофизика, 2016, т. 57, № 9, с. 1601—1615.
- Доценко С.Ф. Волны цунами в непрерывно стратифицированном океане. Процессы возбуждения и распространения цунами. 1982. М.: ИО АН СССР. С.40-52.
- Доценко С.Ф. Эффекты вращения Земли при генерации цунами подводными землетрясениями // Изв. РАН ФАО. 1999. Т.35. №5. С.706-714.

- Доценко С.Ф., Кузин И.П., Левин Б.В., Соловьева О.Н. Возможные проявления цунами от сейсмических источников в Каспийском море // Физика Земли. – 2003. – №. 4. – С. 49-55.
- Доценко С.Ф., Шокин Ю.И. Генерация вихрей в непрерывно стратифицированной вращающейся жидкости при смещениях участка дна бассейна // Вычислительные технологии. 2001. 6. №1. С.13-22.
- Зырянов В.Н. Топографические вихри в динамике морских течений. – 1995.
- Ингель Л.Х. Вихревой “след” землетрясения в море // ДАН. 1998. Т.362. №4. С.548-549.
- Крашенинников С.П. Описание земли Камчатки, сочиненное Степаном Крашенинниковым, Академии Наук Профессором // С.-Петербург: Тип. При Императорской Академии Наук. – 1755. – Т. 1. – С. 438.
- Куликов Е.А., Медведев П.П., Лаппо С.С. Регистрация из космоса цунами 26 декабря 2004 г. в Индийском океане // Доклады Академии наук. 2005. – Т. 401. – №. 4. – С. 537-542.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т // Т. VI. Гидродинамика. М. – 1988.
- Левин Б.В., Кайстренко В.М., Рыбин А.В., Носов М.А., Пинегина Т.К., Разжигаева Н.Г., Сасорова Е.В., Ганзей К.С., Ивельская Т.Н., Кравчуновская Е.А., Колесов С.В., Евдокимов Ю.В., Бурджуа Д., Макиннесс Б., Фицхью Б. Проявления цунами 15.11.2006 г. на Центральных Курильских островах и результаты моделирования высот заплесков // ДАН, 2008, т.419, №1, с.118-122.
- Левин Б.В., Носов М.А., Павлов В.П., Рыкунов Л.Н. Охлаждение поверхности океана, вызываемое подводным землетрясением // ДАН. – 1998. – Т. 358. – №. 3. – С. 399.
- Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. – 1983.
- Никонов А.А., Гусяков В.К., Флейфель Л.Д. Новый каталог цунами в Черном и Азовском морях в приложении к оценке цунамиопасности российского побережья // Геология и геофизика. – 2018. – Т. 59. – №. 2. – С. 240-255.
- Носов М.А., Колесов С.В., Нурисламова Г.Н., Большакова А.В. Влияние вращения Земли на волны цунами, вызванные

- глубокофокусным Охотоморским землетрясением 2013 г //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2018. – №. 6. с. 117-123
- Носов М.А. О возбуждении цунами в сжимаемом океане вертикальными подвижками дна //Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 2000. – Т. 36. – №. 5. – С. 718-726.
- Носов М.А., Григорьева С.С. Предвычисление цунами по данным сети глубоководных станций //Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2015. – №. 4. – С. 109-115.
- Носов М.А., Колесов С.В. Комбинированная численная модель цунами //Математическое моделирование. – 2019. – Т. 31. – №. 1. – С. 44-62.
- Носов М.А., Колесов С.В. Метод постановки начальных условий в задаче численного моделирования цунами //Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2009. – №. 2. – С. 96-99.
- Носов М.А., Семенцов К.А. Расчет начального возвышения в очаге цунами с использованием аналитических решений //Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2014. – Т. 50. – №. 5. – С. 612-612.
- Носов М.А., Шелковников Н.К. Возбуждение диспергирующих волн цунами “поршневыми” и “мембранными” подвижками дна // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 1997. – Т. 33. – №. 1. – С. 145-151.
- Носов М.А., Колесов С.В., Нурисламова Г.Н., Большакова А.В., Семенцов К.А., Карпов В.А. Роль силы Кориолиса в динамике волн, возбуждаемых в океане глубокофокусными землетрясениями // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24. № 1. С. 73-85
- Носов М.А., Мошенцева А.В., Левин Б.В. Остаточные гидродинамические поля вблизи очага цунами. ДАН. 2011. Т.438. №5. С.694-698.
- Носов М.А., Нурисламова Г.Н. Потенциальный и вихревой следы цунамигенного землетрясения в океане. Вестник МГУ. Серия 3. Физика и астрономия. 2012. №5. С.44-48.
- Носов М.А., Нурисламова Г.Н. Следы цунамигенного землетрясения во вращающемся стратифицированном океане.

- Вестник МГУ. Серия 3. Физика и астрономия. 2013. №. 6. С.54-59.
- Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. – Н. Новгород : ИПФ, 1996.
- Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. Физматлит. М., 2001.
- Поплавский А.А., Поплавская Л.Н., Спирин А.И., Пермикин Ю.Ю., Нагорных Т. В. Совершенствование магнитудно-географического критерия цунамиопасности // Вулканология и сейсмология. 2009. №1. С. 65-74.
- Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука. Физматлит, 1999. - 320с.
- Соловьев С.Л. Проблема цунами и ее значение для Камчатки и Курильских островов. Проблема цунами. М.: Наука, 1968. С.7-50.
- Соловьева О.Н., Доценко С.Ф., Кузин И.П., Левин Б.В. Цунами в Черном море: исторические события, сейсмические источники и закономерности распространения //Океанология. – 2004. – Т. 44. – №. 5. – С. 679-685.
- Файн И.В., Куликов Е.А. Расчет смещений поверхности океана в очаге цунами, вызываемых мгновенной вертикальной подвижкой дна при подводном землетрясении //Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16. – №. 2.
- Чебров Д.В. Региональный информационно-обрабатывающий центр Петропавловск в Системе предупреждения о цунами на Дальнем Востоке России: результаты эксплуатации в 2010-2018 гг. // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24. № 1. С. 120-135
- Abadie S., Morichon D., Grilli S., Glockner S. (2010). Numerical simulation of waves generated by landslides using a multiple-fluid Navier–Stokes model. Coastal engineering, 57(9), 779-794.
- Alasset P.J., Hébert H., Maouche S., Calbini V., Meghraoui M. (2006) The tsunami induced by the 2003 Zemmouri earthquake (Mw = 6.9, Algeria): modelling and results. Geophys. J. Int. 166(1), 213–226
- Crocker R.I., Matthews D.K., Emery W.J., Baldwin D. (2007) Computing coastal ocean surface currents from infrared and ocean

- color satellite imagery. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 45(2), 435–447.
- Denamiel C., Šepić J., Ivanković D., Vilibić I. (2019) The Adriatic Sea and Coast modelling suite: Evaluation of the meteotsunami forecast component. *Ocean Modelling*, 135, 71-93.
- Fuchs V. *Of ice and men: the story of the British Antarctic Survey, 1943-73.* – Anthony Nelson, 1982.
- Gica E., Spillane M.C., Titov V.V., Chamberlin C.D., Newman J.C. (2008) Development of the forecast propagation database for NOAA's Short-Term Inundation Forecast for Tsunamis (SIFT), Technical Memorandum OAR PMEL–139, 89 pp. Government Printing Office, Seattle, WA.
- Gill A.E. (1982) *Atmosphere-Ocean Dynamics.* Academic Press, New York.
- Grilli S.T., Ioualalen M., Asavanant J., Shi F., Kirby J.T., Watts P. (2007) Source constraints and model simulation of the 26 December 2004, Indian Ocean tsunami. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* 133(6), 414–428.
- Gusiakov V.K. (2011) Relationship of tsunami intensity to source earthquake magnitude as retrieved from historical data. *Pure and applied geophysics.* 168(11), 2033-2041.
- Hammack J.L. (1980) Baroclinic tsunami generation. *Journal of Physical Oceanography*, 10(9), 1455-1467.
- Handbook for Tsunami Forecast in the Japan Sea.* Earthquake and Tsunami Observation Division, Seismological and Volcanological Department, Japan Meteorological Agency, 22 pp. 2001.
- Horrillo J., Wood A., Kim G. B., Parambath A. (2013) A simplified 3 - D Navier - Stokes numerical model for landslide - tsunami: Application to the Gulf of Mexico. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 118(12), 6934-6950.
- Hsiao S.C., Lin T.C. (2010) Tsunami-like solitary waves impinging and overtopping an impermeable seawall: Experiment and RANS modeling. *Coastal Engineering*, 57(1), 1-18.
- Iwasaki S. (1982) Experimental study of a tsunami generated by a horizontal motion of a sloping bottom. *Bull. Earthq. Res. Inst. Univ. Tokyo* 57, 239–262.
- Kajiura K. (1963) The leading wave of a tsunami. *Bull. Earthq. Res. Inst.* 41(3), 535–571.

- Kato T., Terada Y., Nishimura H., Nagai T., Koshimura S.I. (2011) Tsunami records due to the 2010 Chile earthquake observed by GPS buoys established along the Pacific coast of Japan. *Earth Planets Space* 63(6), e5–e8.
- Kim K.O., Kim D.C., Choi B.H., Pelinovsky E., Yuk J.H. (2015) Extreme Tsunami Inundation at Babi Island due to Flores Earthquake Induced Tsunami in 1992. *Ocean & Polar Research*, 37(2).
- Kozelkov A.S., Kurkin A.A., Pelinovskii E.N., Kurulin V.V. (2015) Modeling the cosmogenic tsunami within the framework of the Navier-Stokes equations with sources of different types. *Fluid Dynamics*, 50(2), 306-313.
- Lamb H. (1993). *Hydrodynamics*. Cambridge university press.
- Mai P.M., Thingbaijam K.K.S. (2014) SRCMOD: An online database of finite - fault rupture models. *Seismological Research Letters*, 85(6), pp.1348-1357.
- Mikada H., Mitsuzawa K., Matsumoto H., Watanabe T., Morita S., Otsuka R., Sugioka H., Baba T., Araki E., Suyehiro K. (2006) New discoveries in dynamics of an M8 earthquake—phenomena and their implications from the 2003 Tokachi-Oki earthquake using a long term monitoring cabled observatory. *Tectonophysics* 426, 95–105.
- Murty T.S. (1977). *Seismic sea waves: tsunamis*.
- Nosov M.A., Moshenceva A.V., Kolesov S.V. (2013) Horizontal motions of water in the vicinity of a tsunami source // *Pure Appl. Geophys.* V.170. Iss.9-10. P.1647-1660.
- Nosov M.A. (1999). Tsunami generation in compressible ocean. *Physics and Chemistry of the Earth, Part B: Hydrology, Oceans and Atmosphere*, 24(5), 437-441.
- Nosov M.A., Kolesov S.V. (2007) Elastic oscillations of water column in the 2003 Tokachi-oki tsunami source: in-situ measurements and 3-D numerical modelling. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 7(2), 243-249.
- Nosov M.A., Bolshakova A.V., Kolesov S.V. (2014) Displaced water volume, potential energy of initial elevation, and tsunami intensity: Analysis of recent tsunami events. *Pure and Applied Geophysics*, 171(12), 3515-3525.

- Nosov M., Karpov V., Kolesov S., Sementsov K., Matsumoto H., Kaneda Y. (2018). Relationship between pressure variations at the ocean bottom and the acceleration of its motion during a submarine earthquake. *Earth, Planets and Space*, 70(1), 100.
- Nosov M.A., Kolesov S.V. (2011) Optimal initial conditions for simulation of seismotectonic tsunamis. *Pure Appl. Geophys.* 168(6–7), 1223–1237.
- Okada Y. (1985) Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space // *Bulletin of the seismological society of America*. V.75. №. 4. P. 1135-1154.
- Okal E.A. (2011) Tsunamigenic earthquakes: past and present milestones // *Pure and Applied Geophysics*. V. 168. №. 6-7. P. 969-995.
- Okal E.A., MacAyeal D.R. (2006) Seismic recording on drifting icebergs: Catching seismic waves, tsunamis and storms from Sumatra and elsewhere, *Seismol. Res. Letts.*. V.77. P.659–671.
- Popinet S. (2012) Adaptive modelling of long-distance wave propagation and fine-scale flooding during the Tohoku tsunami. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 12, 1213–1227.
- Qin X., Motley M., LeVeque R., Gonzalez F., Mueller K. (2018) A comparison of a two-dimensional depth-averaged flow model and a three-dimensional RANS model for predicting tsunami inundation and fluid forces. *Natural Hazards & Earth System Sciences*, 18(9).
- Rabinovich A.B., Lobkovsky L.I., Fine I.V., Thomson R.E., Ivelskaya T.N., Kulikov E.A. (2008) Nearsurface observations and modeling of the Kuril Islands tsunamis of 15 November 2006 and 13 January 2007. In: *Advances in Geosciences*, vol. 14, pp. 105–116.
- Renault L., Vizoso G., Jansá A., Wilkin J., Tintoré J. (2011) Toward the predictability of meteotsunamis in the Balearic Sea using regional nested atmosphere and ocean models. *Geophysical Research Letters*, 38(10).
- Saito T., Furumura T. (2009) Three-dimensional tsunami generation simulation due to sea-bottom deformation and its interpretation based on the linear theory. *Geophys. J. Int.* 178(2), 877–888.
- Shevchenko G., Ivelskaya T., Loskutov A., Shishkin A. (2013) The 2009 Samoan and 2010 Chilean tsunamis recorded on the Pacific

- coast of Russia //Pure and Applied geophysics. V. 170. №. 9-10. P. 1511-1527.
- Tanioka Y. (2018). Tsunami simulation method assimilating ocean bottom pressure data near a tsunami source region. *Pure and applied geophysics*, 175(2), 721-729.
- Tanioka Y., Satake K. (1996) Tsunami generation by horizontal displacement of ocean bottom. *Geophys. Res. Lett.* 23(8), 861–864.
- Tanioka Y., Seno T. (2001) Sediment effect on tsunami generation of the 1896 Sanriku tsunami earthquake. *Geophys. Res. Lett.* 28(17), 3389–3392.
- Tatehata H. (1997) The new tsunami warning system of the Japan Meteorological Agency //Perspectives on Tsunami Hazard Reduction. Springer, Dordrecht. P. 175-188.
- Tinti S., Bortolucci E., Armigliato A. (1999) Numerical simulation of the landslide-induced tsunami of 1988 in Vulcano island, Italy. *Bull. Volcanol.* 61, 121–137.
- Titov V.V., Gonzalez F.I., Mofjeld H.O., Venturato A.J. (2003) NOAA time Seattle tsunami mapping project: procedures, data sources, and products. NOAA Technical Memorandum OAR PMEL-124, 21p.
- Tolstoy I., Clay C.S. (1987) *Ocean Acoustics: Theory and Experiment in Underwater Sound* American Institute of Physics. Inc., New York, 274.
- Toon O.B., Zahnle K., Morrison D., Turco R.P., Covey C. (1997) Environmental perturbations caused by the impacts of asteroids and comets. *Reviews of Geophysics*, 35(1), 41-78.
- Topics 2000. Natural catastrophes — the current position. Special Millennium Issue // Munich Re Group, 2001, 126 p.
- Users Guide for the Pacific Tsunami Warning Center Enhanced Products for the Tsunami and other Coastal Hazards Warning System for the Caribbean and Adjacent Regions (CARIBE-EWS). IOC Technical Series No 135. UNESCO/IOC, 2017.
- Zaytsev A.I., Chernov A.G., Yalciner A.C. et al.: MANUAL Tsunami Simulation/Visualization Code NAMI DANCE versions 4.9 (February 2010)

Учебное пособие

**Введение в теорию волн цунами**

*Носов Михаил Александрович*

Сдано в набор 15.08.2019. Подписано в печать 15.09.2019

Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная №1

Уч.-изд. л. 10,5. Физ. п. 10,5. Тираж 300. Заказ № 3254

ООО «Издательство Янус-К»  
127411, Москва, Учинская ул., д.1

Отпечатано в ООО «ИНФОРМ-СОФТ»  
119034, Москва, Еропкинский пер., д.16

ISBN 5-8037-0773-2

